Exercice 1 : Aire de jeux

1a Raison

0,5

Si l'axe était vertical, ça ne serait pas un axe principal d'inertie, il y aurait des forces latérales

suivant

Rq ta réponse implique que $\vec{P}$ ∼

1b Moment d'inertie

$I_O = R^2\left(\frac{M}{2}+m\right)$

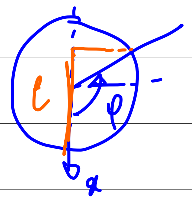
1

$I_O = I_O^{disque} + I_O^{ado}$

$I_O^{disque} = \frac{1}{2} M R^2$ $I_O^{ado} = m R^2$

$I_O = R^2\left(\frac{M}{2}+m\right)$

1c Démonstration

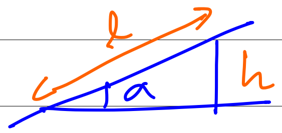


$\ell = R(1-\cos\varphi)$

projection sur (Ox)

1

Vue de côté



$h = \ell \sin\alpha$

$\Rightarrow h = R\sin\alpha(1-\cos\varphi)$

1d Démonstration

Calcul de E_p pour avoir les points d'équilibre

$E_p = mgh = mgR\sin\alpha(1-\cos\varphi)$ [+cte ~~disque~~]

$\frac{dE_p}{d\varphi} = mgR\sin\alpha \sin\varphi$

2 Min/Max qd $\frac{dE_p}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, $\varphi = \pi$

Min en $\varphi = 0$ max en $\varphi = \pi$

$\downarrow$ éq stable $\downarrow$ éq instable

Voir place de secours

1e Equation différentielle

equation $\ddot{\varphi} + \frac{mg\cancel{R}\sin\alpha}{R^{\cancel{2}}(M/2+m)}\sin\varphi = 0$

$E_m = E_p + E_c = mgR\sin\alpha(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 = cte$

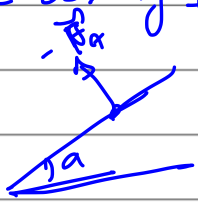
1 $\frac{dE_m}{dt} = 0 = 0 - mgR\sin\alpha\,\cancel{\dot{\varphi}}(-\sin\varphi) + \frac{1}{2}I_0\,2\,\cancel{\dot{\varphi}}\,\ddot{\varphi}$

$mgR\sin\alpha\sin\varphi + I_0\ddot{\varphi} = 0$

Autre approche moments sur le disque sans ado

$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_O^D \dot{\varphi} \vec{e}_z \right) = I_O^D \ddot{\varphi} \vec{e}_z$

$= \vec{OO'} \wedge M\vec{g} + \vec{OO'} \wedge \vec{N} + \vec{OA} \wedge \vec{F}_A$ $\quad \vec{F}_A$ force ado/disque



→ obtenir $\vec{F}_A$

$-\vec{F}_A + m\vec{g} = m\vec{a}_{ado}$

+ lien $\ddot{\varphi}$ / a_{ado} ...

pas gagné

Autre approche → moments sur (ado + disque) → plan secours

1f Nature du mouvement; pulsation

nature oscillations harmoniques / sinusoïdal

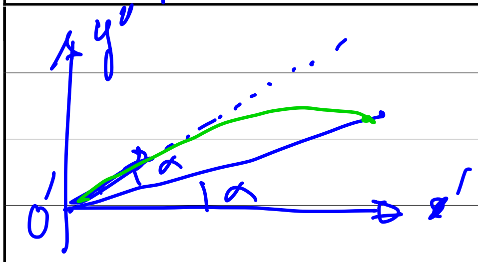
$\Omega_0 =$ ... en fonction de ce qui a été trouvé en (e)

1

↳ réponse correcte : $\sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{R\left(\frac{M}{2}+m\right)}}$

1g Vitesse

$v_0 = \sqrt{gR \dfrac{\cos\alpha}{\cos^2 2\alpha\,(\tan 2\alpha - \tan\alpha)}}$



angle de tir : 2α

arrive en $A \left| \begin{array}{l} 2R\cos\alpha \\ 2R\sin\alpha \end{array} \right.$

balistique dans $(O'x'y')$ $\quad \vec{a} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \end{array} \right. \quad \vec{v} \left| \begin{array}{l} V_0 \cos 2\alpha \\ -gt + V_0 \sin 2\alpha \end{array} \right.$

2,5

$\vec{r} \left| \begin{array}{l} (V_0 \cos 2\alpha)\, t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin 2\alpha\, t \end{array} \right. \rightarrow \vec{r_f} \left| \begin{array}{l} (V_0 \cos 2\alpha)\, t_f = 2R\cos\alpha \\ -\frac{1}{2} g t_f^2 + V_0 \sin 2\alpha\, t_f = 2R\sin\alpha \end{array} \right.$

$t_f = \dfrac{2R\cos\alpha}{V_0 \cos 2\alpha} \Rightarrow -\dfrac{1}{\cancel{2}} g \dfrac{\cancel{4}^{2} R^{\cancel{2}} \cos^2\alpha}{V_0^2 \cos^2 2\alpha} + \cancel{V_0} \sin 2\alpha \dfrac{2\cancel{R}\cos\alpha}{\cancel{V_0}\cos 2\alpha} = 2\cancel{R}\sin\alpha$

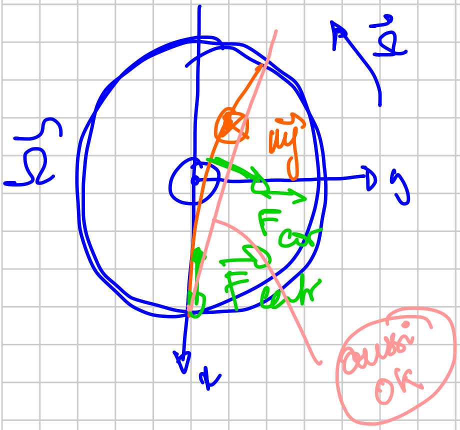
$\dfrac{\cancel{2} g R \cos^2\alpha}{V_0^2 \cos^2 2\alpha} = \cancel{2}\cos\alpha \tan 2\alpha - \cancel{2}\sin\alpha$

$V_0^2 = gR \cdot \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha\,(\cos\alpha \tan 2\alpha - \sin\alpha)}$

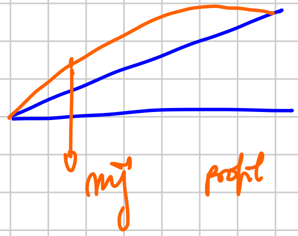
$= gR \dfrac{\cos\alpha}{\cos^2 2\alpha\,(\tan 2\alpha - \tan\alpha)}$

1h Schéma

Vue de dessous disque → supposition Ω ⊙ (adapter)



1



1i Explication (mettre les forces sur le dessin de la question 1i)

Force réelle : $m\vec{g}$

forces fictives : force de Coriolis : $-2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_R(P)$

1

$\uparrow \vec{v}$ $\quad \vec{\Omega}\wedge\vec{v}$ $\quad \vec{\Omega}\wedge\vec{v}$

$\odot\ \vec{\Omega}$ $\quad \leftarrow$ $\quad \Rightarrow$ $\quad \rightarrow$

Forces centrifuge $\vec{F}_{centr}$ pointe depuis le centre du cercle

1j Place de secours pour exercice 1

Question d

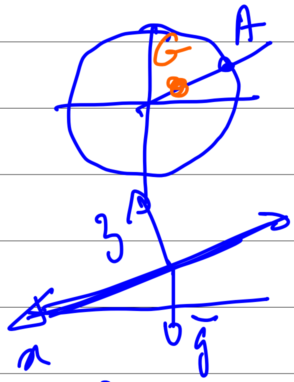
Autre solution : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ et $\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$
pour montrer pos° équilibre

+ montrer dans quel sens cela part (calcul ou statique)
↳ $\varphi = 0$ → stable
$\varphi = \pi$ → instable

1e alternative (pas simple)

$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ sur axe + disque

$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OO} \wedge \vec{N} + \vec{OG} \wedge (M+m)\vec{g}$ G : cdm axe + disque



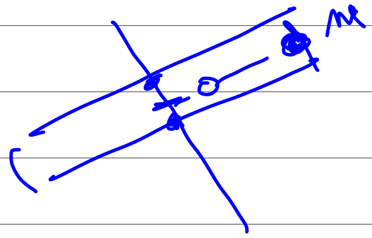
$(M+m)\vec{OG} = M\vec{OO} + m\vec{OA}$
$OG = \frac{m}{M+m} R$

$\vec{g} = g\sin\alpha\,\vec{e_x} - g\cos\alpha\,\vec{e_z}$

$\vec{OG} = OG\cos\varphi\,\vec{e_x} + OG\sin\varphi\,\vec{e_y}$
$\vec{OG} \wedge (m+M)\vec{g} = [OG\cos\varphi\,\vec{e_x} + OG\sin\varphi\,\vec{e_y}] \wedge [g\sin\alpha\,\vec{e_x} - g\cos\alpha\,\vec{e_z}]$

$= OG\cos\varphi(-g\cos\alpha)(-\vec{e_y}) + OG\,g\sin\varphi\sin\alpha(-\vec{e_z})$
$- OG\sin\varphi\,g\cos\alpha\,\vec{e_x}$.

~~1j) Place de secours pour exercice 1~~ 2



→ $\bar{m}$ pb que la tige dans de mvt, il faut en fait 2 points pour maintenir le disque et assurer la rotation autour de l'axe

2 points sur l'axe → moment ⊥ axe

compense les composantes $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$

Reste $\vec{e}_z$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = -OG\,(M+m)\,g \sin\varphi \sin\alpha\,\vec{e}_z = -\frac{m}{\cancel{(M+m)}} R\,\cancel{(M+m)}\,g \sin\varphi \sin\alpha\,\vec{e}_z$$

$$= -mg\sin\varphi\sin\alpha\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_O = I_O\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow I_O\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z = -mg\sin\varphi\sin\alpha\,\vec{e}_z$$

⟹ $\bar{m}$ résultat

tous les points si disposition "miraculeuse" du tourne girant

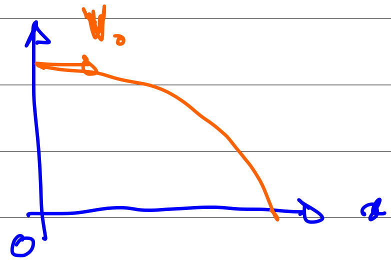
+0,5 bonus si bonne explication (...)

Exercice 2 : lancer sur plateforme mouvante

2a Distance L parcourue horizontalement par la balle

$L = 2\sqrt{\frac{\Delta K h}{g m}}$

$\Delta K \to E_c$ $\Delta K = \frac{1}{2} m v_0^2$ $\Rightarrow v_0^2 = \frac{2\Delta K}{m}$



$\vec{a} \begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix}$ $\vec{v} \begin{vmatrix} v_0 \\ -gt \end{vmatrix}$ $\vec{r} \begin{vmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{vmatrix}$

2

à t_f en $\vec{r} \begin{vmatrix} L \\ 0 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow -\frac{1}{2} g t_f^2 + h = 0$

$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\to$ $v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = L$

$L = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{\Delta K h}{g m}}$

2b Vecteur vitesse $\vec{v}_f$ de la balle juste avant le choc $= \sqrt{2gh}$

$\vec{v}_f = \sqrt{\frac{2\Delta k}{m}} \cdot \vec{e_x} - g\sqrt{\frac{2h}{g}}\, \vec{e_y}$

1

$\vec{v}_f \begin{vmatrix} v_0 \\ -g t_f \end{vmatrix}$ $\quad t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\quad \vec{v}_f \begin{vmatrix} v_0 \\ -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \end{vmatrix}$

$v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta k}{m}}$

Essai $E_{m,i} = E_{m,f}$ $\quad \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$ $\quad$ (ou $\Delta k + mgh$) $= E_{m,i}$

$\frac{1}{2}mv_f^2 = E_{m,f} \Rightarrow v_f = \left[\frac{2(\Delta k + mgh)}{m}\right]^{1/2}$

↳ max 0,6 $\quad$ Manque vectorielle

2c Vitesse finale $\vec{v}_p$ de la plateforme juste après l'impact

$\vec{v}_p = \frac{m}{m+M}\sqrt{\frac{2\Delta k}{m}}\, \vec{e_x}$ ← important !

1,5

Choc mou, conservation $\vec{p}$ horizontal seulement ($\vec{e_x}$)

$m\vec{v_0} + \vec{0} = (m+M)\, \vec{v}_p$

$\vec{v}_p = \frac{m}{m+M}\vec{v_0} = \frac{m}{m+M} v_0 \vec{e_x}$ $\quad v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta k}{m}}$

2d Vitesse initiale horizontale $\vec{v'}_0$ du projectile en fonction de ΔK

$\vec{v'}_0 = \sqrt{\dfrac{2\Delta K}{m(1+\cancel{m/M})}}\ \vec{e_x}$ $\left(= \sqrt{\dfrac{M\,2\Delta K}{m(M+m)}}\ \vec{e_x} = \left(\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}\sqrt{\dfrac{2\Delta K}{m}}\right)\vec{e_x}\right.$

- Conservation $\vec{p}$ (explosion inélastique)

Avant : $\vec{p} = \vec{0}$ après $\vec{p} = M\vec{v}_p' + m\vec{v}_0'$

ΔK convertie en E_c f $\Delta K = \frac{1}{2}mv_0'^2 + \frac{1}{2}Mv_p'^2$

2

$Mv_p' + mv_0' = 0 \Rightarrow v_p' = -\frac{m}{M}v_0'$

$Mv_p'^2 + mv_0'^2 = 2\Delta K \Rightarrow \cancel{M}\frac{m^2}{M^{\cancel{2}}}v_0'^2 + mv_0'^2 = 2\Delta K$

$v_0'^2 = \dfrac{2\Delta K}{m\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \dfrac{M\,2\Delta K}{m(M+m)}$

$= \dfrac{M}{M+m}\,\dfrac{2\Delta K}{m}$

2e Comparaison L' et L

☐ $L' > L$ ☐ $L' < L$ ☐ $L' = L$ ☒ On ne peut pas dire

1

$V_0 \searrow$ à cause cons° $\vec{p}$ $V_0 \nearrow$ car plate forme rotat

$\Rightarrow$ on ne peut pas dire

2f Distance L' entre le lanceur et l'endroit où la balle touche la plateforme

$L' = \sqrt{\frac{M+m}{M}}\sqrt{\frac{2\Delta K}{m}}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ (Rq $L' > L$)

la balle part avec $v'_0 = \sqrt{\frac{2\Delta K M}{m(M+m)}}$

t_f inchangé $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ⇒ la balle a parcouru $t_f v'_0$

1,5 la plateforme part avec $v_p = -\frac{m}{M}v'_0$

⇒ elle recule de $-v_p t_f = \frac{m}{M}v'_0$

L' = somme des 2 $L' = v'_0 t_f - v_p t_f$

$L' = (v'_0 - v_p)\sqrt{\frac{2h}{g}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)v'_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$L' = \frac{\sqrt{M+m}}{\sqrt{M}}\sqrt{\frac{2\Delta K \cancel{M}}{m(\cancel{M+m})}}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\Delta K(M+m)}{Mm}}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

2g Dans quelle limite sur $\frac{M}{m}$ retrouve-t-on $L' = L$? Commentez.

Si $\frac{M}{m} \to \infty$ $M \gg m$ $\sqrt{\frac{M+m}{M}} = \sqrt{1 + \frac{m}{M}} \to 1$

1 On retrouve $L' = L$

Si la plateforme est ∞ lourde, elle ne bouge pas

2h Vitesse finale $\vec{v'}_p$ de la plateforme par rapport au sol après le choc mou

$\vec{v'}_p$ $\vec{0}$

1

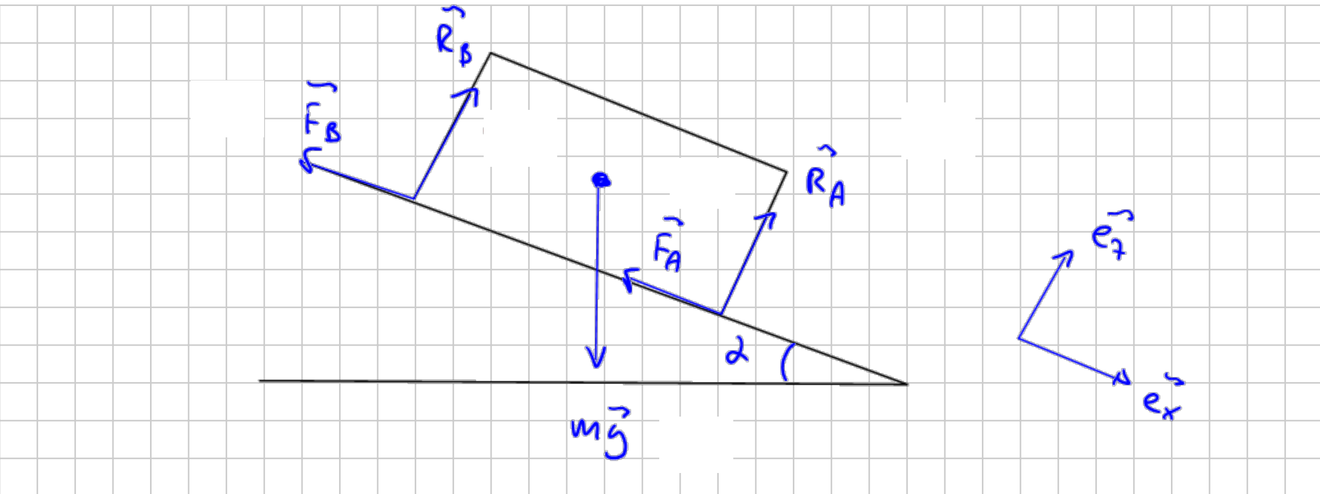
Conservation de $\vec{P}_{horiz}$ entre avant tir et après choc $P_{avant} = \vec{0} \Rightarrow P_{après} = (M+m)\vec{v'}_p = \vec{0} \Rightarrow \vec{0}$

possible de faire le calcul

2i Place de secours pour exercice 2

Bloc glissant sur une pente

3a Dessin



3b Vitesse après une distance L

$v_f =$ $v_f = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha) + v_0^2}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} m a_x = -F_A - F_B + mg\sin\alpha \\ m a_y = R_A + R_B - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$R_A + R_B = mg\cos\alpha$$

$$m a_x = -\mu_c(R_A + R_B) + mg\sin\alpha$$

$$= -\mu_c \, mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$$

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha) \qquad v_x = a_x t + v_0$$

avec $x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t$

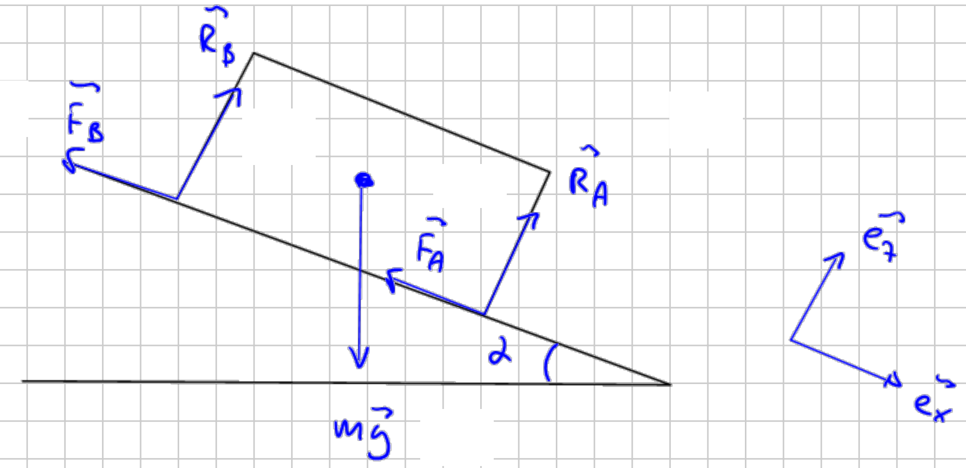
à t_f, $x = L = \frac{1}{2} a_x t_f^2 + v_0 t_f$

$$t_f = \frac{v_f - v_0}{2} \implies L = v_0 \frac{(v_f - v_0)}{a_x} + \frac{1}{2} a_x \frac{(v_f - v_0)^2}{a_x^2}$$

... $v_f = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha) + v_0^2}$

Bloc glissant sur une pente

3a Dessin



3b Vitesse après une distance L

$v_f =$ $v_f = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha) + v_0^2}$

Energie / travail / non conservatif

$E_{m,2} = E_{m,1} + W_{\vec{F_A}} + W_{\vec{F_B}}$

$E_{m,2} = \frac{1}{2} m v_f^2$

$E_{m,1} = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgL\sin\alpha$

$W_{\vec{F_A}} = -L\mu_c R_A$

$W_{\vec{F_B}} = -L\mu_c R_B$

$\frac{1}{2} m V_f^2 = \frac{1}{2} m V_0^2 + mgL\sin\alpha - L\mu_c(R_A + R_B)$

Comme $R_A + R_B = mg\cos\alpha$ (Équ. en x)

$\frac{1}{2} \cancel{m} V_f^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} V_0^2 + \cancel{m}gL\sin\alpha - L\mu_c \cancel{m}g\cos\alpha$

$V_f = \sqrt{v_0^2 + 2Lg(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)}$

3c Force de réaction du sol s'exerçant sur le point B pendant le mouvement

$\vec{R}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2} mg \cos\alpha \left(1 - \mu_c \frac{h}{\ell}\right) \vec{e_z} = mg\cos\alpha \left(\frac{\ell - \mu_c h}{2\ell}\right) \vec{e_z}$

$\sum \vec{M_O} = 0 \quad \vec{GB} \times \vec{R_B} + \vec{GB} \times \vec{F_B} + \vec{GA} \times \vec{R_A} + \vec{GA} \times \vec{F_A} + \underbrace{\vec{GG} \times m\vec{g}}_{=0} = 0$

$\vec{GB} \times \vec{R_B} = \ell R_B \vec{e_z} \qquad \vec{GA} \times \vec{R_A} = -\ell R_A \vec{e_z}$

$\vec{GB} \times \vec{F_B} = \mu_c h N_B \vec{e_z} \qquad \vec{GA} \times \vec{F_A} = \mu_c h N_A \vec{e_z}$

$\Rightarrow \ell(R_B - R_A) + \mu_c h (R_B + R_A) = 0$

avec $\sum F_x = 0 \quad R_B + R_A = mg\cos\alpha$

$$\begin{cases} \ell(R_B - R_A) + \mu_c h \, mg \cos\alpha = 0 \\ -R_A = R_B - mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$\dots \quad R_B = \frac{1}{2} mg \cos\alpha \left(1 - \mu_c \frac{h}{l} \right)$$

$$= mg \cos\alpha \left(\frac{l - \mu_c h}{2l} \right)$$

3d Condition sur μ_c pour que le point B ne décolle pas du sol, en fonction de h et l seulement

de $\quad R_B = \frac{1}{2} mg \cos\alpha \left(1 - \mu_c \frac{h}{l} \right)$

$R_B > 0 \qquad \mu_c \frac{h}{l} < 1$

$$\mu_c < \frac{l}{h}$$

3e Pente critique, $\tan(\alpha_b)$, pour laquelle le bloc commence à basculer

$\tan(\alpha_b) = \frac{\ell}{h}$

(A) $\sum F = 0$

$$\begin{cases} m a_x = -\mu_s (R_A + R_B) + mg \sin\alpha = 0 \\ m a_y = R_A + R_B - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$\mu_s mg \cos\alpha = mg \sin\alpha$

$\mu_s = \tan(\alpha)$ condition pour pas de glissement

(B) $\sum M_o = 0$ cas limite pour une rotation

$\sum \vec{M}_o = 0 \quad \vec{GB} \times \vec{R_B} + \vec{GB} \times \vec{F_B} + \vec{GA} \times \vec{R_A} + \vec{GA} \times \vec{F_A} + \underbrace{\vec{GG} \times m\vec{g}}_{=0} = 0$

$\vec{GB} \times \vec{R_B} = \ell R_B \vec{e_z} \qquad \vec{GA} \times \vec{R_A} = -\ell R_A \vec{e_z}$

$\vec{GB} \times \vec{F_B} = \mu_s h N_B \vec{e_z} \qquad \vec{GA} \times \vec{F_A} = \mu_s h N_A \vec{e_z}$

$\Rightarrow \ell (R_B - R_A) + \mu_c h (R_B + R_A) = 0$

avec $\sum F_x = 0 \quad R_B + R_A = mg\cos\alpha$

$$\begin{cases} \ell (R_B - R_A) + \mu_c h \, mg \cos\alpha = 0 \\ -R_A = R_B - mg\cos\alpha \end{cases}$$

$R_B = \frac{1}{2} mg \cos\alpha \left(1 - \mu \frac{h}{\ell}\right)$

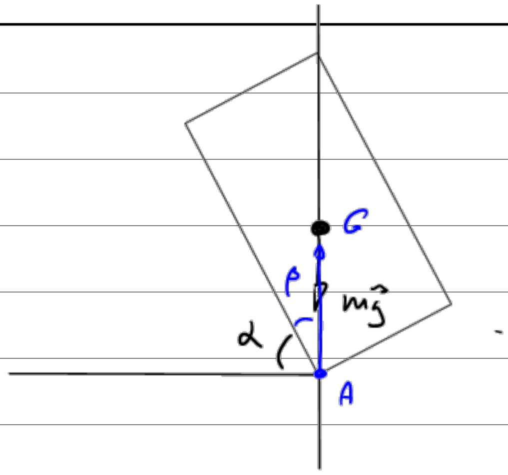
$\mu_s < \frac{\ell}{h}$

(A+B) $\tan\alpha = \frac{\ell}{h}$

3e Pente critique, $\tan(\alpha_b)$, pour laquelle le bloc commence à basculer

$\tan(\alpha_b) = \frac{\ell}{h}$

Cas limite



$\vec{AG} \parallel m\vec{g}$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$\beta = \arctan\left(\frac{h}{\ell}\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{h}{\ell}\right)$

$\tan \alpha = \frac{\ell}{h}$

3f Condition sur h, l et μ_s seulement, pour que le bloc commence à basculer avant de glisser.

condition pour pas de glissent

$$\tan(\alpha) \leq \mu_s$$

condition de basculement

$$\tan(\alpha) = \frac{l}{h}$$

$$\mu_s > \frac{l}{h}$$

3g Place de secours exercice 3