Solution du problème de l'examen blanc en coordonées cylindriques

a) La contrainte s'écrit en coordonnées cylindriques $\rho = z \tan\alpha$.

b) La projection des forces qui s'appliquent sur le point matériel dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -mg\vec{e}_z, \\ \vec{N} &= N\cos\alpha\vec{e}_\rho - N\sin\alpha\vec{e}_z. \end{aligned} \tag{1}$$

De plus, en tenant compte de la contrainte, l'accélération s'écrit

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\vec{e}_\phi + \frac{\ddot{\rho}}{\tan\alpha}\vec{e}_z. \tag{2}$$

Les équations du mouvement sont alors données par

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) &= N\cos\alpha, \\ m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) &= 0, \\ \frac{m\ddot{\rho}}{\tan\alpha} &= -mg - N\sin\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

c) La vitesse du point matériel s'écrit

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z, \tag{4}$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \wedge m(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z) \\ &= -\frac{m\rho^2\dot{\phi}}{\tan\alpha}\vec{e}_\rho + m\rho^2\dot{\phi}\vec{e}_z. \end{aligned} \tag{5}$$

e)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgz \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgz \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

avec $r = \rho/\sin\alpha$ et $L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z = m\rho^2\dot{\phi}$.