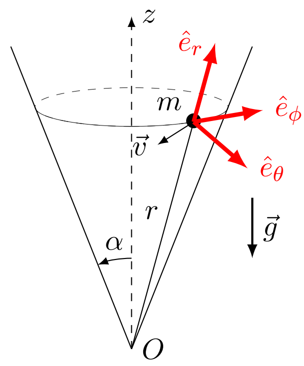
Examen blanc de physique générale I **13 novembre 2025 - durée ∼1h30**

*** EXEMPLE DE SOLUTION ATTENDUE ***

Problème 1 : Point sur un cône (16 points)



a) (2 pts)
L'utilisation des coordonnées sphériques est la plus appropriée ici : $r(t)$, $\theta(t) = \alpha =$ constante, $\phi(t)$.
[**1 pt** pour le dessin correct du repère choisi (cartésien, cylindrique ou sphérique), à condition qu'il soit utilisé dans la résolution du problème, et **1 pt** pour l'expression correcte de la contrainte]

b) (3 pts)
En coordonnées sphériques, le vecteur position, $\vec{r}$, et ses dérivées, s'écrivent :

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r \tag{1}$$
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\phi \tag{2}$$
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)\,\hat{e}_r - r\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\sin\alpha + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha)\,\hat{e}_\phi \tag{3}$$

[**1 pt** pour l'accélération correctement simplifiée selon la contrainte]
Les forces sont le poids, $m\vec{g}$, et la force de liaison, $\vec{N}$

$$m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\hat{e}_r + \sin\alpha\,\hat{e}_\theta) \tag{4}$$
$$\vec{N} = N_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{5}$$

[**1 pt** pour les forces écrites correctement dans le repère]
Les équations du mouvement sont données par la deuxième loi de Newton, $m\vec{g} + \vec{N} = m\ddot{\vec{r}}$. En projection sur les axes du repère :

$$-mg\cos\alpha = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2\sin^2\alpha \tag{6}$$
$$mg\sin\alpha + N_\theta = -mr\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha \tag{7}$$
$$0 = mr\ddot{\phi}\sin\alpha + 2m\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha \tag{8}$$

[**1 pt** pour les équations du mouvement correctes]

c) (2 pts)

$$\vec{L}_O = \vec{r}\wedge m\vec{v} = r\,\hat{e}_r \wedge m(\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\phi) = -mr^2\dot{\phi}\sin\alpha\,\hat{e}_\theta \tag{9}$$

[**1 pt** pour l'expression correcte de $\vec{L}_O$ dans le repère chosi]
Comme les moments de force par rapport à O, $\vec{r}\wedge(m\vec{g})$ et $\vec{r}\wedge\vec{N}$, ne sont pas nuls (sauf si $\vec{r} = \vec{0}$), $\vec{L}_O$ n'est pas une quantité conservée (sa dérivée est non nulle). [**1 pt** pour la justification correcte]

d) (2 pts)

$$L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{z} = \vec{L}_O \cdot (\cos\alpha\,\hat{e}_r - \sin\alpha\,\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha \tag{10}$$

[**1 pt** pour l'expression correcte de L_z dans le repère chosi] Si on dérive L_z par rapport au temps :

$$\frac{dL_z}{dt} = 2mr\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\alpha + mr^2\ddot{\phi}\sin^2\alpha = r\sin\alpha(\underbrace{2m\dot{r}\dot{\phi}\sin\alpha + mr\ddot{\phi}\sin\alpha}_{=0\,(\text{cf.Eq.}(8))}) = 0 \tag{11}$$

Donc la composante L_z est constante. [**1 pt** pour la démonstration]
Solution alternative : Puisque aucune des forces n'a de composante selon $\hat{e}_\phi$, les moments des forces par rapport à O n'ont pas de composante selon z. La composante L_z est donc constante.

e) (2 pts)
Le poids est une force conservative, et la force de liaison ne travaille pas car le support est fixe, donc l'énergie mécanique est constante. [**1 pt** pour la justification correcte]
En prenant le zéro de l'énergie potentielle de pesanteur en O :

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + mgr\cos\alpha = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha) + mgr\cos\alpha \tag{12}$$

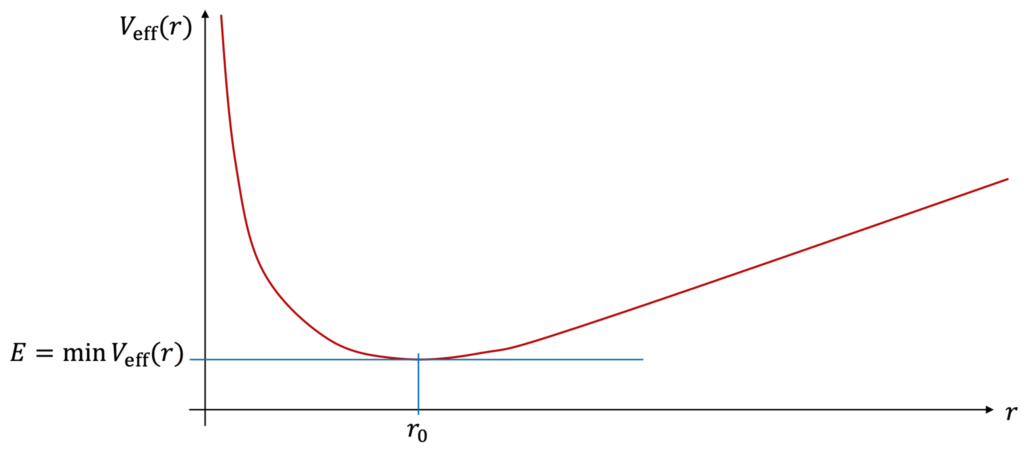
[**1 pt** pour l'expression correcte de l'énergie mécanique]
Solution alternative (1) : Par dérivation de l'expression pour l'énergie mécanique, et en utilisant l'équation (6), on trouve que $dE/dt = 0$, donc l'énergie mécanique est constante.
Solution alternative (2) : Par intégration de l'équation (6), on trouve une intégrale première, que l'on identifie avec l'énergie mécanique. Puisque c'est une intégrale première du mouvement, l'énergie mécanique est constante.

f) (1 pts)
En utilisant l'équation (10) pour éliminer la dépendance en $\dot{\phi}^2$ dans E :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha \tag{13}$$

Et donc $V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$. [**1 pt** pour la substitution et l'expression de V_{eff}]

g) (2 pts)
Étudions d'abord le comportement de $V_{\text{eff}}(r)$ pour r très petit (proche de 0) ou très grand. Lorsque r tend vers 0, $V_{\text{eff}}(r) \simeq \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mr^2\sin^2\alpha}$ et la fonction diverge en $1/r^2$. Lorsque r tend vers l'infini, $V_{\text{eff}}(r) \simeq mgr\cos\alpha$, et la fonction diverge comme une droite de pente $mg\cos\alpha$. On note aussi que $V_{\text{eff}}(r)$ est partout positive, de par le choix de l'origine du potentiel de pesanteur. On obtient ainsi l'allure ci-dessous [**1 pt** pour le dessin correct].
Une trajectoire circulaire correspond à une unique valeur possible de $r = r_0$, c'est-à-dire à un équilibre dans le potentiel $V_{\text{eff}}(r)$, ce qui a lieu lorsque l'énergie mécanique est égale au minimum de $V_{\text{eff}}(r)$ [**1 pt** pour le dessin correct].



h) (2 pts)
Par l'équation (6), en considérant la distance $r = r_0$ constante, on obtient

$$-mg\cos\alpha = -mr_0\dot{\phi}^2\sin^2\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{r_0\sin^2\alpha}}\,. \tag{14}$$

[1 pt]
Solution alternative : On cherche d'abord la valeur de r_0 en posant

$$\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r} = mg\cos\alpha - \frac{L_z^2}{m(\sin\alpha)^2\,r^3} = 0 \tag{15}$$

d'où

$$r_0^3 = \frac{L_z^2}{m^2 g\cos\alpha(\sin\alpha)^2} \tag{16}$$

En outre, pour une trajectoire circulaire de rayon $r_0\sin\alpha$, la vitesse scalaire vaut $r_0\sin\alpha\ \dot{\phi}$ et $L_z = m\ r_0^2(\sin\alpha)^2\ \dot{\phi}$. En injectant dans l'eq. (16), on retrouve bien (14).

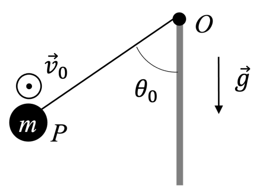
On trouve enfin la période T :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = 2\pi\sqrt{\frac{r\sin\alpha\tan\alpha}{g}}\,. \tag{17}$$

[1 pt]

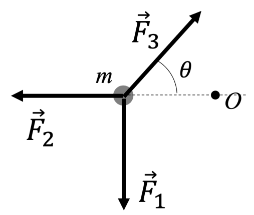
Questionnaire à choix multiples (4 points, 1 pt par réponse correcte)

a) Une balle de masse m, considérée comme un point matériel P, est attachée à un fil de masse négligeable qui est toujours tendu, et dont l'autre extrémité, O, est fixe. La balle a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ horizontale et perpendiculaire au plan contenant la verticale et le fil ; l'angle θ_0 n'est pas nul.



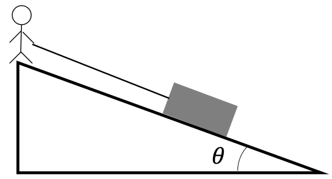
La composante selon z du moment cinétique est constante et le moment des forces par rapport à O n'est pas nul.
Les forces agissant sur le point P sont la tension T du fil et la force de pesanteur. La tension T est dirigée vers O et donc son moment est nul. La force de pesanteur a un moment non nul dirigé perpendiculairement au plan contenant la verticale et le fil.
Le moment des forces selon la verticale z est nul, donc $L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{z} = constante$

b) Un point matériel de masse m est soumis à trois forces. Ces trois forces ont la même norme F. Deux d'entre elles sont perpendiculaires et la troisième agit selon un angle θ, comme illustré sur la figure. Aucune autre force n'agit sur cet objet.



Il n'est pas possible que l'objet soit à l'équilibre.
La force $\vec{F}_3$ compense $\vec{F}_2$ si $\theta = 0°$ ou $\vec{F}_1$ si $\theta = 90°$, mais pas leur résultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$; donc l'objet ne peut pas être à l'équilibre.
La resultante des forces n'est pas une force centrale parce que $\vec{F}_1 - \vec{F}_3$ a une composante non nulle dans la direction perpedinculaire à $\vec{Om}$.

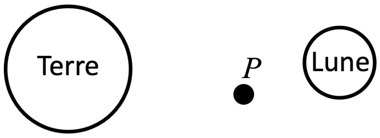
c) En le retenant par une corde, on fait descendre à vitesse constante un bloc de masse m le long d'un plan incliné de pente constante. Entre le bloc et le plan incliné il y a des frottements secs. On augmente notre force sur la corde pour arrêter le bloc, puis on lâche la corde (dont on néglige la masse et les frottements avec le sol).



Le mouvement du bloc dépend du coefficient de frottement statique et de l'angle θ.

On definit $\hat{x}$ le vecteur unitaire parallèle au plan incliné avec la personne comme origine. La loi de Newton projetée sur $\hat{x}$ s'écrit $m\ddot{x} = mg\sin\theta - F_{stat}$ avec $F_{stat} = mg\cos\theta\mu_s$ et μ_s le coefficient de frottement statique. Donc on trouve que $\ddot{x} = g\sin\theta - \mu_s g\cos\theta$: selon les valeurs de θ et de μ_s le bloc peut rester immobile ou commencer à glisser

d) On considère un objet spatial P, considéré comme un point matériel, qui est soumis à la gravitation de la Terre et de la Lune, et à aucune autre force.



L'énergie mécanique du point matériel est conservée, mais pas le moment cinétique.

L'objet spatial est soumis à deux forces centrales, notamment l'attraction gravitationelle de la Terre et de la Lune. Les deux forces sont conservatives, donc l'énergie mécanique est conservée. Par contre, le centre de la Lune est distinct du centre de la Terre, donc la resultante des forces n'est pas centrale. En effet, le moment de la resultante des deux forces depend de la position du point P, donc le moment cinétique n'est pas conservé