Série 07 : Energie et équilibre

Exercices d'introduction

A Questions conceptuelles

1. Pourquoi est-il plus aisé de gravir une pente en zigzag que tout droit ?
2. Vous soulevez une caisse depuis le sol pour la poser sur une table. Comparer le travail de la force que vous exercez sur la caisse avec celui du poids de la caisse. Le travail de la force que vous exercez dépend-il :
(i) de la trajectoire suivie (directe ou au contraire compliquée) ?
(ii) du temps que ça prend ?
(iii) de la hauteur de la table ?
(iv) du poids de la caisse ?

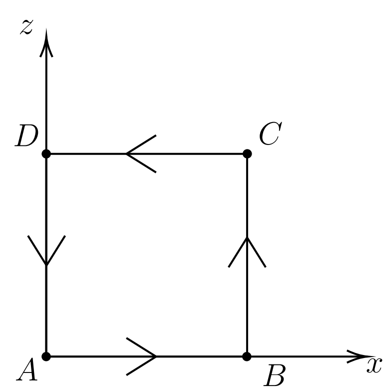
B Forces conservatives et non-conservatives

Considérons un point matériel soumis à une force de rappel $\vec{F} = -kz\vec{e}_z$

1. Montrer que cette force dérive d'un potentiel, i.e. $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ avec $\vec{\nabla}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$.
2. En déduire si $\vec{F}$ est une force conservative.

Considérons maintenant la cas d'une force de la forme $\vec{F} = -kz\vec{e_x}$.

3. Calculer le travail de $\vec{F}$ le long des segments AB, BC, CD et DA qui forment le chemin fermé :



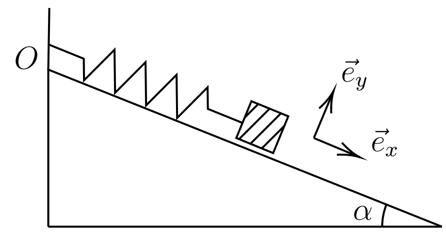
où $z_A = z_B = 0, z_C = z_D = z_0$ et $x_A = x_D = 0, x_B = x_C = x_0$.

4. En déduire si $\vec{F}$ est une force conservative.

C Position d'équilibre du ressort

On considère dans cet exercice un ressort, d'une longueur à vide l_0, sur un plan incliné d'un angle α. On propose de déterminer sa position d'équilibre à partir de son énergie potentielle.

1. Ecrire l'énergie potentielle $E_{\text{pot}}(\vec{r})$ en fonction des coordonnées x, y du vecteur position $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ dans le repère :



   où l'origine O est placée au point d'attache du ressort.
2. Trouver la position $\vec{r}_{eq}$ qui minimise $E_{\text{pot}}(\vec{r})$.
3. Retrouver la position d'équilibre dans le cas où le ressort est suspendu à la verticale.

Problèmes

---

1 Saut à l'élastique [** 20 min]

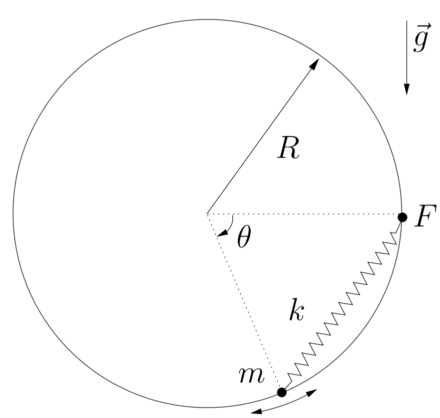
Une personne de masse m attachée à un élastique de constante k saute sans vitesse initiale du bord d'un pont à une hauteur h au-dessus d'une rivière. L'élastique empêche tout juste la personne de toucher la rivière. On néglige les frottements. On propose de définir un axe y pointant vers le haut et ayant son origine au niveau de la rivière.

a) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale, montrer que la longueur à vide l_0 de l'élastique est $l_0 = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$.

b) Montrer que, durant son saut, la personne atteint sa vitesse maximale à la position $y = h - l_0 - \frac{mg}{k}$.

2 Pendule perturbé par un ressort [** 30 min]

Un point matériel de masse m est contraint à se déplacer sans frottement sur un cercle vertical de rayon R. Il est soumis à son poids et à la force d'un ressort qui le relie à un point fixe F sur la circonférence du cercle, situé à la même hauteur que le centre du cercle. Le ressort a une raideur k et une longueur à vide nulle.



a) Exprimez l'énergie potentielle du point matériel en fonction de θ et des données du problème.

b) Déterminez les deux positions d'équilibre $\theta_{\text{eq},1}$ et $\theta_{\text{eq},2}$ et établissez si elles sont stables ou instables.

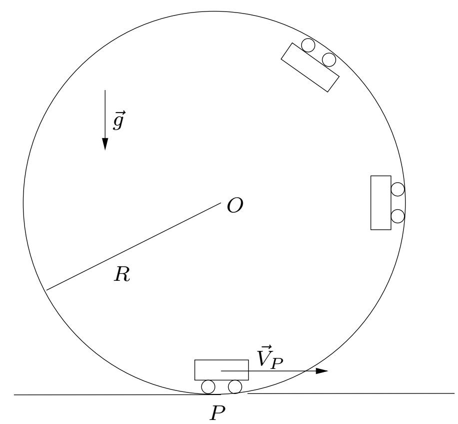
c) Calculer la pulsation des petites oscillations harmoniques autour de la position d'équilibre stable.

d) Vérifier que les réponses aux questions b) et c) donnent les résultats attendus dans les deux cas limites définis par $k \to 0$ et $g \to 0$.

Indication : $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$ et $\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$

3 Loop the loop [*** 40 min]

Une cascadeuse tente de faire le tour d'un circuit vertical en forme de cercle de rayon R au volant de sa voiture de poids mg. Elle entre dans le circuit au point P avec une vitesse $\vec{V}_P$ et on suppose qu'elle se laisse ensuite tourner autour du circuit en roue libre sans appuyer ni sur l'accélérateur ni sur le frein. Il n'y a pas de frottement.



a) Ecrire les équations du mouvement de la voiture sur le cercle.

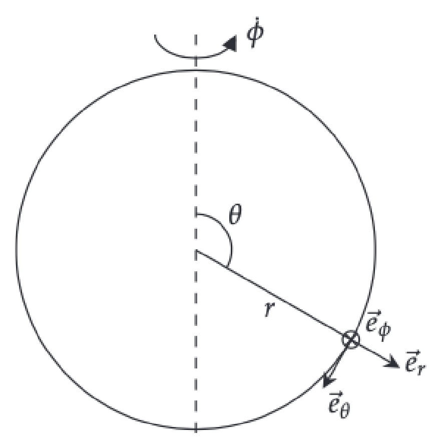
b) Exprimer l'énergie mécanique de la voiture en tout point de la piste circulaire, et montrer que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.

c) Calculer la force de réaction du circuit sur la voiture en fonction de la position de la voiture sur la piste circulaire et de sa vitesse d'entrée V_P.

d) Quelle est la vitesse minimale que doit avoir la voiture au point d'entrée P de la boucle pour réussir le looping sans décoller ?

4 Bille sur un anneau [*** 40 min]

Une bille est astreinte à se déplacer sur un anneau de rayon r tournant à une vitesse angulaire $\dot{\phi}$ constante autour d'un diamètre vertical. La position de la bille est entièrement déterminée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale.



a) Ecrire l'équation du mouvement de la bille selon l'axe $\vec{e}_\theta$.

b) Déterminer les positions d'équilibre θ_{eq}.

c) Ces positons d'équilibre sont-elles stables ? Si oui, déterminer la pulsation ω des petites oscillations autour de θ_{eq}.

Indication : Afin de déterminer le comportement des petites oscillations autour de θ_{eq}, on peut utiliser l'approximation suivante pour une fonction $f(x)$ autour d'un point x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f^{'}(x_0), \text{ où } |x - x_0| << 1. \tag{1}$$

Elements de réponse :

Exercice 2 :

a)

$$E_{pot}(\theta) = -kR^2 \cos\theta - mgR\sin\theta + \text{constante}$$

b)

$$\theta_{\text{eq},1} = \arctan\frac{mg}{kR}$$

et

$$\theta_{\text{eq},2} = \arctan\frac{mg}{kR} + \pi$$

c)

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{g}{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}$$

Exercice 3 :

— A partir de la conservation de l'énergie totale du système, on peut retrouver une des equations du mouvement :

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

— La voiture ne décolle pas si et seulement si $V_P > \sqrt{5gR}$

Exercice 4 :

— Les pulsations des petites oscillations sont : $\omega = \sqrt{g/r - \dot{\phi}^2}$ et $\omega = \dot{\phi}\sin\theta_{eq}$.