Série 05 : Oscillateurs harmoniques

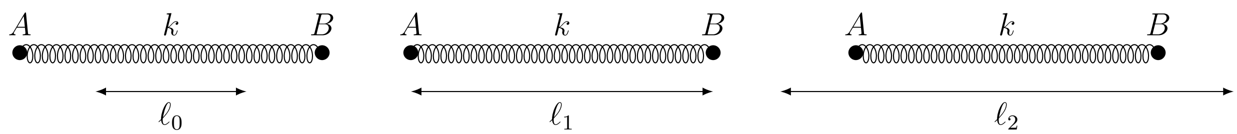
Exercices d'introduction

A. Questions conceptuelles [* 10 min]

1. Dans le mouvement d'un oscillateur harmonique, identifier les situations où : 1) la vitesse est maximale, 2) l'accélération est nulle, 3) la vitesse est nulle, et 4) l'accélération est maximale.
2. La vitesse d'un objet peut-elle augmenter quand son accélération diminue ? Si oui, donnez un exemple.
3. Dans le cas général, dessiner l'allure de la position, de la vitesse et de l'accélération au cours du temps, sur un même graph. Quel est le déphasage entre ces courbes ?

B. Resorts [* 5 min]

Illustrer sur le dessin les forces appliquées par le ressort aux points A et B, dans les trois cas de longueurs à vide (ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2).



C. Ressort vertical comprimé [* 10 min]

Un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 est posé verticalement sur le sol. Alors qu'il n'est pas déformé, on place sur lui une masse M et on la soutient pendant que le ressort se comprime pour ne la lâcher que lorsqu'elle est immobile. Elle est alors à l'équilibre : la somme des forces qu'elle subit est nulle.
Quelle est la longueur du ressort dans la position d'équilibre ?

D. Oscillateur harmonique amorti et forcé [COMPLEMENT FACULTATIF *** 60 min]

Comme vu dans le cours, l'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique unidimensionnel de masse m et de constante de raideur k, soumis à une force de frottement $F_{\text{frot.}} = -b\dot{x}$ et à une force extérieure $F(t)$, est :

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t).$$

Trouvez la trajectoire $x(t)$ pour $t > 0$. Utilisez les conditions initiales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

a) $k = 0, F(t) = f\cos(\omega t)$

Indice : Commencez par démontrer que

$$x_p(t) = C\cos(\omega t + \phi),$$

avec

$$C = \frac{f}{m\sqrt{\omega^4 + b^2\omega^2/m^2}}$$

et

$$\phi = \pi + \arctan\left(\frac{b}{m\omega}\right),$$

est une solution particulière de l'équation différentielle.

b) $b = 0,\ F(t) = fe^{-\lambda t}$
Indice : Cherchez une solution particulière sous la forme

$$x_p(t) = Ce^{-\lambda t}$$

c) $b = 0, F(t) = f\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$
Indice : Cherchez une solution particulière sous la forme

$$x_p(t) = t(d_1\cos(\omega_0 t) + d_2\sin(\omega_0 t)),$$

où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

1 Araignée suspendue à un fil élastique [** 30 min]

Une araignée de masse m est suspendue par son fil de constante élastique k et de longueur à vide L à un arbre supposé fixe. Elle est soumise à la gravitation et oscille verticalement autour de sa position d'équilibre. On néglige les frottements.

a) Faire un dessin de la situation et représenter toutes les forces subies par l'araignée. Choisir des coordonnées pour décrire le mouvement de l'araignée. Quelle est sa position d'équilibre ?

b) Ecrire l'équation du mouvement de l'araignée.

c) La solution générale de l'équation du mouvement est donnée par $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \bar{x}$. Déterminer les valeurs de $\bar{x}$ et ω_0 qui satisfont l'équation du mouvement trouvée en b).

On considère maintenant que les frottements de l'air ne sont pas négligeables. La force de frottement est opposée à la vitesse et sa norme $|\vec{F}|$ est proportionnelle à la norme de la vitesse instantanée : $|\vec{F}| = \eta|\vec{v}|$.

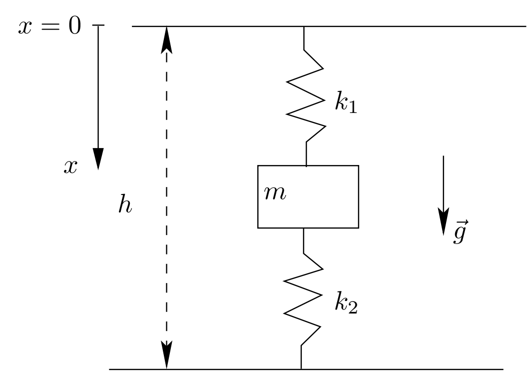
d) Ecrire l'équation du mouvement vertical de l'araignée.

e) Quelle est la condition sur le coefficient η pour que le mouvement soit sous-critique ? Quelle est alors la pulsation effective (ou pseudo-pulsation) de l'oscillation ?

f) Déterminer le nombre N de pulsations après lequel l'amplitude a diminué de moitié.

2 Oscillateur à deux ressorts [** 40 min]

Un bloc de masse m, soumis à la pesanteur $\vec{g}$, est relié au sol et au plafond d'une pièce de hauteur h par deux ressorts verticaux de longueurs à vide nulles et de raideurs k_1 et k_2, comme indiqué sur la figure. On ne considère que les mouvements verticaux du bloc, selon un axe x dirigé vers le bas avec son origine au plafond. On néglige les dimensions du bloc ainsi que les frottements.



a) Représenter sur un dessin toutes les forces qui s'appliquent sur le bloc et donner leurs expressions.

b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement du bloc. Constater qu'il s'agit de celle d'un oscillateur harmonique. Quelle en est la pulsation ?

Indice : Pour résoudre l'équation différentielle, vous pouvez utiliser le changement de variable

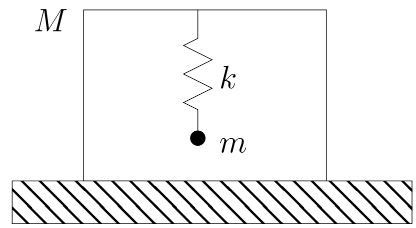
$$u(t) = x(t) - x_{\text{eq}},$$

où x_{eq} est la position d'équilibre du système de ressorts (position où la somme des forces agissant sur le bloc est nulle).

c) On lâche le bloc depuis le plafond avec une vitesse initiale nulle. Sachant que les paramètres du problème sont tels que le bloc ne touchera jamais le sol, au bout de combien de temps le bloc atteindra-t-il le point le plus bas de sa trajectoire ? Quelle est la position x de ce point ?
Application numérique : k_1=100 N/m, k_2=20 N/m, m=10 kg, h=4 m et g=10 m/s^2

3 Ressort dans une boîte [*** 30 min]

Une boîte fermée de masse M est posée sur une table. A l'intérieur, une bille de masse m est fixée au couvercle par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Quelle doit être l'amplitude minimale A des oscillations verticales de la bille pour que la boîte décolle de la table ? On suppose que les valeurs de l_0 et k sont suffisamment grandes pour que la bille ne tape ni le couvercle, ni la table, avant que la boîte ne décolle.



Indication : traiter la bille et la boîte comme des points matériels.

Eléments de réponse

Problème 1 :
a) Position d'équilibre $x_{\text{eq}} = L + \frac{mg}{k}$
c) $\bar{x} = \dfrac{mg}{k} + L$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
e)

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{4km - \eta^2}}{2m}$$

f)

$$N = \frac{\ln 2}{2\pi} \frac{\sqrt{4km - \eta^2}}{\eta}$$

Problème 2 :
b) Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$
c)

$$x_{\text{max}} = 2\frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2}$$

Problème 3 :

- La boîte décolle si $x \leq l_0 - \frac{Mg}{k}$
- C'est à dire si l'amplitude est plus grande que $A \geq \frac{(m+M)g}{k}$