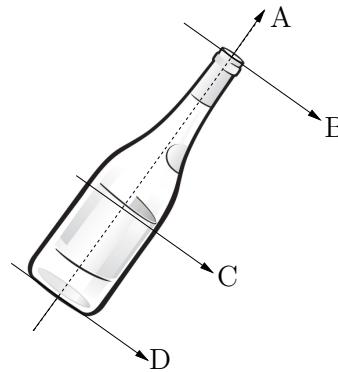


Série 13 : Dynamique des solides

Exercices d'introduction

A Moment d'inertie d'une bouteille

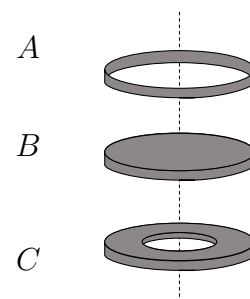
On considère une bouteille pleine. Ordonner les moments d'inertie autour des quatre axes présentés sur le dessin : l'axe de symétrie de la bouteille A, et les trois axes perpendiculaires à A et passant par le bouchon de la bouteille B, son centre de masse C, et par sa base D. Sachant que $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$, identifier à quel axe correspond chaque moment d'inertie.



B Moment d'inertie d'anneaux

Les trois corps ci-contre sont homogènes, de même rayon et de même masse.

Classer les corps A, B et C par ordre croissant de difficulté à modifier leur vitesse angulaire autour de l'axe indiqué sur le dessin.



C Cube suspendu

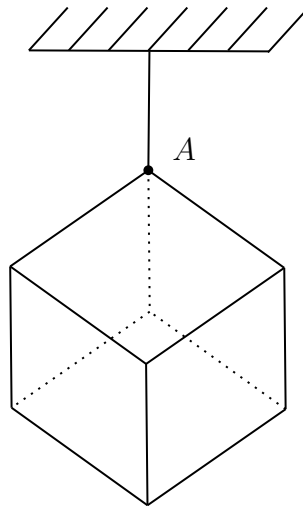
On considère un cube plein de masse M et de côté a suspendu par un de ses sommets.

a) Que vaut le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe passant par le centre de masse G ?

On propose de calculer son moment cinétique \vec{L}_A par rapport au point d'attache A pour un vecteur de rotation $\vec{\omega}$ vertical.

b) Justifier pourquoi l'axe vertical passant par A est un axe principal d'inertie.

- c) En déduire le moment d'inertie par rapport à cet axe puis le moment cinétique \vec{L}_A .



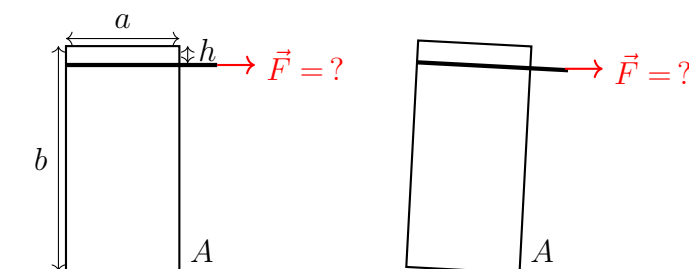
On s'intéresse maintenant au cas où le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ est horizontal.

- d) Démontrez qu'il existe trois plans de symétrie contenant le point A et le centre de masse du cube G .
 e) Démontrez qu'il existe un axe principal d'inertie horizontal associé à chacun de ses plans. Calculer le moment d'inertie par rapport à ces axes.
 f) En déduire que tout axe horizontal passant par A est un axe principal d'inertie et calculer l'expression du moment cinétique.

Problèmes

1 Bloc de pierre [* 15 min]

Un bloc de pierre a la forme d'un prisme droit. Sa base, qui est un carré de côté a , est posée sur le sol. Sa hauteur est b et sa masse m . Il est ceinturé par une corde, à une distance h de son bord supérieur. On tire sur cette corde avec une force horizontale, normale à l'une des faces du bloc. Celui-ci va basculer en pivotant autour d'une des arêtes de sa base (le frottement au sol empêche le bloc de glisser).



Calculer la force avec laquelle il faut tirer la corde pour que le bloc commence à se soulever.

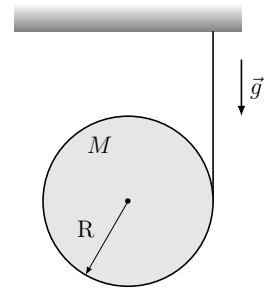
Indication : considérer la situation d'équilibre où le bloc ne repose plus que sur une arête. L'épaisseur du bloc n'intervenant pas, on peut considérer ce problème comme bidimensionnel. Ecrire alors les moments de force par rapport à A .

Application numérique : $a = 30$ cm, $b = 60$ cm, $m = 150$ kg, $h = 5$ cm

2 Yoyo [** 20 min]

Un yoyo consiste en un disque homogène de rayon R et de masse M , autour duquel un fil sans masse est enroulé. Le fil est attaché au plafond et reste en tout temps vertical, et le yoyo est libre de descendre sous l'action de la gravité.

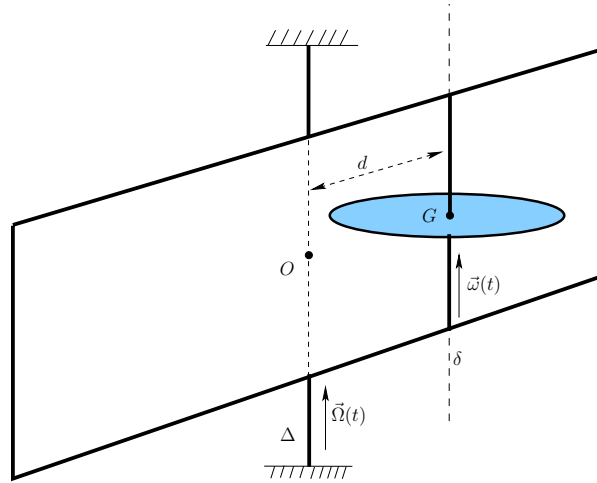
- Rappeler, d'après le cours, l'expression du moment d'inertie I du disque autour d'un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre.
- Déterminer l'accélération \vec{a} du centre de masse du yoyo, ainsi que la tension \vec{T} dans le fil.



3 Volant et châssis [*** 35 min]

Un volant horizontal peut tourner autour d'un axe vertical δ passant par son centre de masse G . Cet axe est solidaire d'un châssis pouvant tourner autour d'un autre axe vertical Δ . Les deux axes sont séparés d'une distance d et on note O le point de l'axe Δ à une distance d du point G . Le volant (resp. le châssis tout seul) a une masse m (resp. M) et admet l'axe δ (resp. Δ) comme axe principal d'inertie, par rapport auquel il a un moment d'inertie $I_{v,\delta}$ (resp. $I_{c,\Delta}$). Le volant et le châssis sont équipés chacun d'un système de freinage (sans masse) qui permet, par l'application d'un couple de force, de les immobiliser autour de leur axe de rotation. Soient $\vec{\omega}(t)$ la vitesse angulaire de rotation propre du volant (par rapport au châssis) et $\vec{\Omega}(t)$ la vitesse angulaire de rotation propre du châssis.

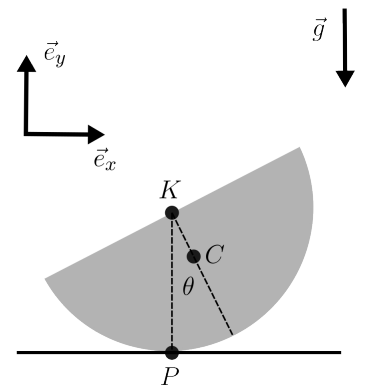
- Donner l'expression du moment cinétique total du système volant+châssis par rapport au point O .
- Initialement, à $t = t_0$, on a $\vec{\omega}(t_0) = \vec{\omega}_0$ et $\vec{\Omega}(t_0) = \vec{0}$. On enclenche le système de freinage du volant jusqu'à ce que, pour un temps $t_1 > t_0$ on obtienne $\vec{\omega}(t_1) = \vec{0}$. Que vaut alors $\vec{\Omega}(t_1)$?
- Au temps t_1 , on relâche le frein du volant et on active le frein du châssis jusqu'à ce que, pour un temps $t_2 > t_1$ on obtienne $\vec{\Omega}(t_2) = \vec{0}$. Que vaut alors $\vec{\omega}(t_2)$?
- A un temps t quelconque, où se trouve l'axe de rotation instantané du volant ?



4 Oscillation d'un demi-cylindre plein [** 25 min]

Un demi-cylindre plein homogène de rayon r et de masse m , en contact avec un plan horizontal oscille dans un plan vertical autour de sa position d'équilibre, en roulant sans glisser sur le plan.

On donne la distance du centre de masse C au point K : $KC = \frac{4r}{3\pi}$ et le moment principal d'inertie du demi-cylindre en K par rapport à l'axe \vec{e}_z est $I_{K,z} = \frac{mr^2}{2}$.



Coupe du demi-cylindre au milieu de sa longueur.

- Justifier que l'axe $K\vec{e}_z$ est un axe principal d'inertie du demi-cylindre.
- Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.
- Quelle serait la différence si nous considérons une demi-boule ou un demi-cylindre évidé au lieu d'un demi-cylindre ? On ne cherchera pas à faire de calculs.

Elements de réponse

Exercice 1 : $F = \frac{amg}{2(b-h)}$

Exercice 2 : $T = \frac{Mg}{3}$

Exercice 3 :

$$\vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,\delta}}{I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2} \vec{\omega}_0 \quad (1)$$

Exercice 4 : $\omega_0^2 = \frac{g}{r} \frac{8}{9\pi-16}$.