Corrigé 05 : Oscillateurs harmoniques

Exercices d'introduction

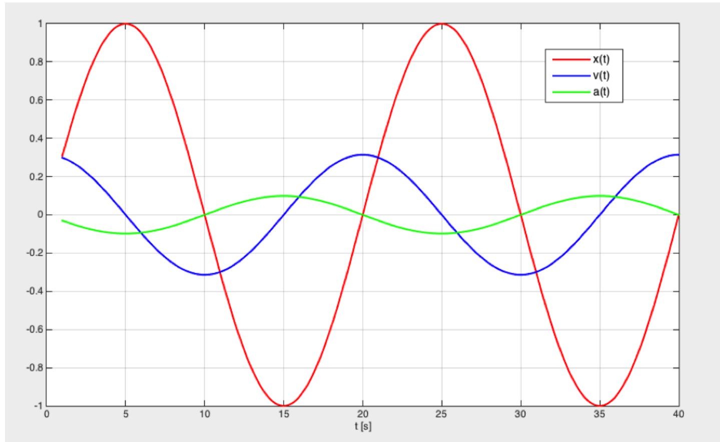
A. Questions conceptuelles

1. En redéfinissant l'origine du temps et l'origine de l'espace, l'équation horaire d'un oscillateur harmonique peut toujours se ramener à $x(t) = A\sin(\omega t)$. Sa vitesse et son accélération valent alors $v(t) = A\omega\cos(\omega t)$ et $a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$. On en déduit que ...
   — ... la norme de la vitesse est maximale quand $\omega t = n\pi$, c'est-à-dire à la position d'équilibre $x = 0$ où n est un nombre entier.
   — ... l'accélération est nulle quand $\omega t = n\pi$, c'est-à-dire à la position d'équilibre $x = 0$.
   — ... la vitesse est nulle quand $\omega t = \pi/2 + n\pi$, c'est-à-dire aux positions extrêmes $x = \pm A$.
   — ... la norme de l'accélération est maximale pour $\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$, c'est-à-dire aux extrêmes $x = \pm A$.
2. Oui c'est possible. En effet, pour que la vitesse augmente il faut que l'accélération soit positive (par définition), et il est parfaitement possible qu'une accélération diminue tout en restant positive.
   — Prenons par exemple un objet se déplaçant sur l'axe x, dont l'accélération décroit linéairement en fonction du temps ($a = a_0(1 - \alpha t)$, $a_0 > 0$, $\alpha > 0$). Calculons la variation de l'accélération et de la vitesse entre les temps t et $t + \Delta t$; avec Δt petit :

   $$\Delta a = a(t + \Delta t) - a(t) = a_0(1 - \alpha(t + \Delta t)) - a_0(1 - \alpha t) = -a_0\alpha\Delta t < 0$$

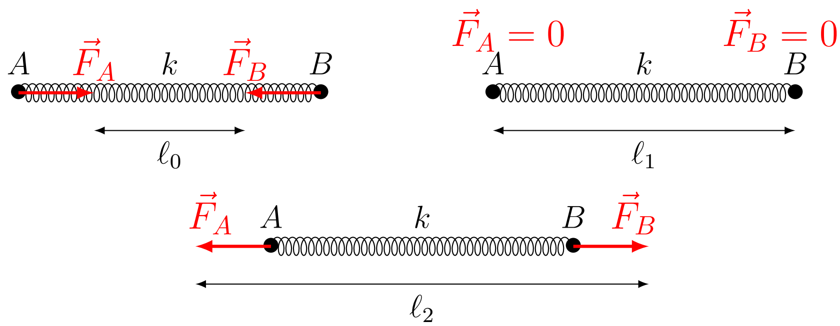
   $$\Delta v \simeq a_0(1 - \alpha t)\Delta t > 0$$

   Donc tant que $\alpha t < 1$, la variation de la vitesse Δv est positive alors que la variation de l'accélération Δa est négative.
   — Imaginez une cycliste dans une pente descendante constante qui pédale au début de la descente, puis se laisse aller en roue libre : l'accélération pendant le laps de temps où elle pédale est supérieure à l'accélération s'exerçant lorsqu'elle est en roue libre, cependant sa vitesse va continuer à augmenter.
   — Dans le mouvement d'un oscillateur harmonique, tel que représenté dans le graphique ci-après pour une pulsation de $\pi/10$, il y a des temps, entre 15s et 20s ou entre 35s et 40s, pendant lesquels l'accélération décroit (courbe verte) alors que la vitesse augmente (courbe bleue). Ceci peut être exprimé analytiquement en considérant le mouvement $x(t) = A\sin(\omega t)$, d'où la vitesse est $v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$, l'accélération est $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t)$, et la variation de l'accélération est $\frac{da}{dt} = -A\omega^3\cos(\omega t)$. La variation de la vitesse est donc de signe opposé à la variation $\frac{da}{dt}$ de l'accélération si $\pi/2 < \omega < \pi$ ou $3\pi/2 < \omega < 2\pi$.

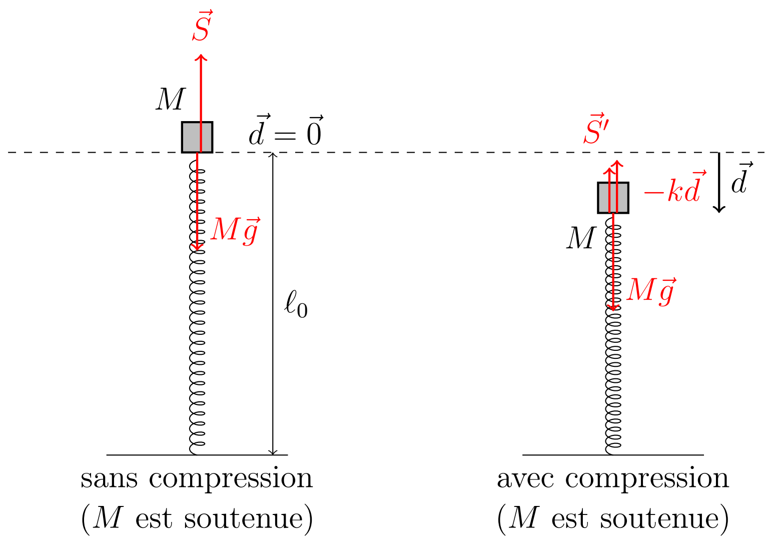


B. Resorts

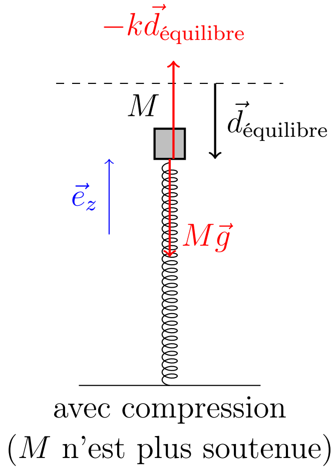
Les forces appliquées aux points A et B sont indiquées en rouge.



C. Oscillateur harmonique vertical Durant la descente, la compression du ressort augmente et le soutien nécessaire est de plus en plus petit.



Enfin, plus aucun soutien n'est requis pour que la masse reste immobile. La déformation atteint alors une certaine valeur pour laquelle le poids est entièrement compensé par la force due au ressort :



Système : objet de masse M

Forces : le poids et la force de rappel du ressort

Loi applicable : 2$^{\text{me}}$ loi de Newton (équilibre)

$$M\vec{g} - k\vec{d}_{\text{équilibre}} = \vec{0}\,.$$

Remarque : la force élastique est dirigée vers le haut. Seule sa norme est inconnue.

En projetant l'équation de Newton selon la direction verticale $\vec{e}_z$, la composante de la force élastique est positive :

$$-k\vec{d}_{\text{équilibre}} = +k d_{\text{équilibre}}\vec{e}_z \quad \text{où } d_{\text{équilibre}} = ||\vec{d}_{\text{équilibre}}||\,.$$

Il vient

$$-Mg + k d_{\text{équilibre}} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_{\text{équilibre}} = \frac{Mg}{k}\,,$$

d'où la longueur du ressort à l'équilibre $\ell = \ell_0 - d_{\text{équilibre}} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}$.

D. Oscillateur harmonique amorti et forcé

Pour chacun des cas, on exprime la trajectoire comme

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t),$$

où $x_g(t)$ est la solution générale de l'équation homogène et $x_p(t)$ est une solution particulière de l'équation non homogène.

a) Dans le cas $k = 0$, le discriminant $\Delta = b^2 - 4km = b^2$ est positif. En conséquence, le mouvement est dans le cas surcritique. En appliquant la formule du cours, on obtient la solution générale de l'équation homogène :

$$x_g(t) = Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}.$$

γ_1, γ_2 sont donnés par

$$\gamma_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} = 0$$

et

$$\gamma_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} = \frac{-b}{m},$$

et donc on obtient

$$x_g(t) = A + Be^{-\frac{b}{m}t}.$$

Comme vu dans le cours, la solution particulière est donnée par

$$x_p(t) = C\cos(\omega t + \phi),$$

où

$$C = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} = \frac{f}{m\sqrt{\omega^4 + b^2\omega^2/m^2}}$$

et

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-b\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right), \text{ si } \omega < \omega_0 = \sqrt{k/m} \\ \pi + \arctan\left(\frac{-b\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right), \text{ si } \omega > \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases} = \pi + \arctan\left(\frac{b}{m\omega}\right).$$

A et B sont déterminés par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(t) =& A + Be^{-\frac{b}{m}t} + C\cos(\omega t + \phi) \\ x(0) =& A + B + C\cos\phi = 0 \\ \dot{x}(0) =& -\frac{b}{m}B - C\omega\sin\phi = 0. \end{aligned}$$

La solution du système pour les constantes A, B est

$$\begin{aligned} A =& \frac{Cm\omega\sin\phi}{b} - C\cos\phi \\ B =& \frac{-C\omega m\sin\phi}{b}. \end{aligned}$$

La trajectoire est donc

$$x(t) = \frac{Cm\omega\sin\phi}{b} - C\cos\phi - \frac{Cm\omega\sin\phi}{b}e^{-\frac{b}{m}t} + C\cos(\omega t + \phi). \tag{1}$$

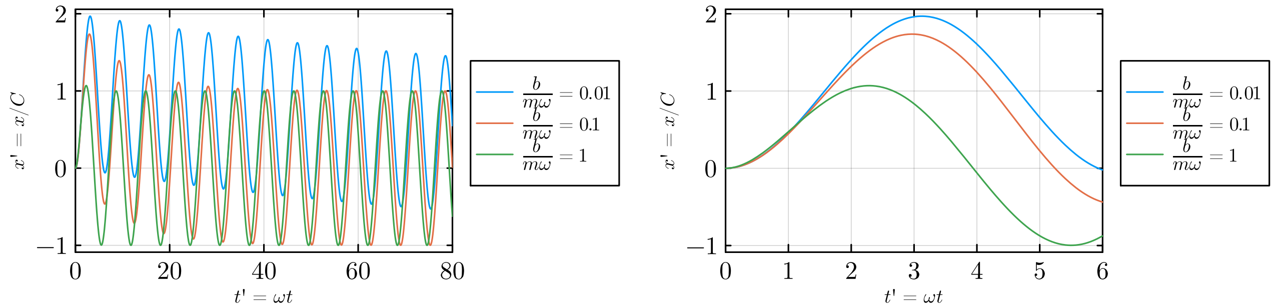


FIGURE 1 – Graphique de la solution de la question A.a (exprimée en quantités adimensionnelles) pour trois valeurs différentes de $\frac{b}{m\omega}$.

On représente aussi la trajectoire sur un graphique. Lorsque les valeurs des paramètres dimensionnels d'un problème ne sont pas connues, il est habituel de représenter les graphiques en fonction de variables adimensionnelles $x' = x/C$ et $t' = \omega t$:

$$x'(t) = \frac{m\omega}{b}\sin\phi - \cos\phi - \frac{m\omega}{b}\sin\phi e^{-\frac{b}{m\omega}t'} + \cos(t'+\phi).$$

Le graphique $x'(t')$ pour trois valeurs différentes de $\frac{b}{m\omega}$ est montré en figure 1.

b) Dans le cas $b = 0$, le discriminant $\Delta = b^2 - 4km = -4km$ est négatif. En conséquence, le mouvement est dans le cas sous-critique. La solution générale de l'équation homogène est :

$$x_g(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Pour trouver la solution particulière, on substitue l'ansatz

$$x_p(t) = Ce^{-\lambda t}$$

dans l'équation différentielle pour obtenir

$$\begin{aligned} &m\lambda^2 Ce^{-\lambda t} + kCe^{-\lambda t} = fe^{-\lambda t} \Leftrightarrow \\ &C = \frac{f}{m\lambda^2 + k}. \end{aligned}$$

A et B sont déterminés par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(t) =& A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{fe^{-\lambda t}}{m\lambda^2 + k} \\ x(0) =& A + \frac{f}{m\lambda^2+k} = 0 \\ \dot{x}(0) =& B\omega_0 - \frac{\lambda f}{m\lambda^2+k} = 0 \end{aligned} \quad .$$

La solution pour les constantes est :

$$\begin{aligned} A =& -\frac{f}{m\lambda^2+k} \\ B =& \frac{\lambda f}{\omega_0(m\lambda^2+k)} \end{aligned} \quad .$$

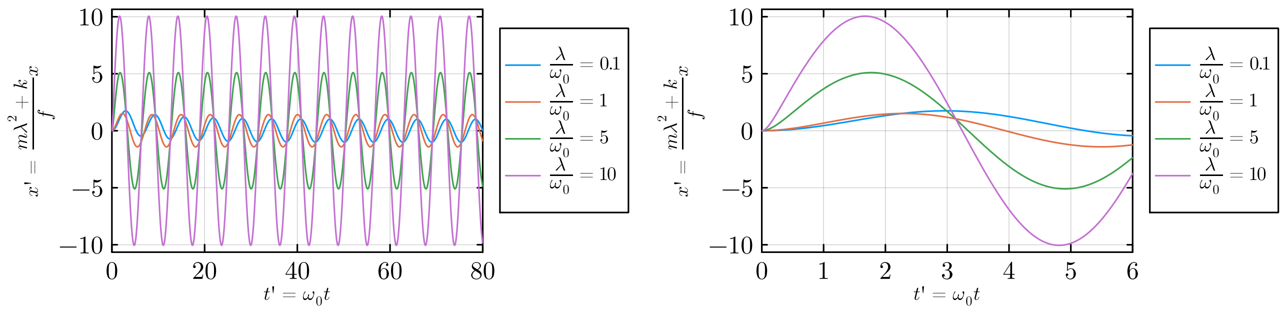


FIGURE 2 – Graphique de la solution de la question A.b (exprimée en quantités adimensionnelles) pour quatre valeurs différentes de $\frac{\lambda}{\omega_0}$.

La trajectoire est

$$x(t) = -\frac{f}{m\lambda^2 + k}\cos(\omega_0 t) + \frac{\lambda f}{\omega_0(m\lambda^2 + k)}\sin(\omega_0 t) + \frac{f e^{-\lambda t}}{m\lambda^2 + k}.$$

Comme dans la question précédente, on exprime la trajectoire en fonction de quantités adimensionnelles $x'(t) = \frac{m\lambda^2+k}{f}x$, $t' = \omega_0 t$:

$$x'(t') = -\cos(t') + \frac{\lambda}{\omega_0}\sin(t') + e^{-\frac{\lambda}{\omega_0}t'}.$$

Le graphique de la trajectoire pour quatre valeurs différentes de λ/ω_0 est montré en figure 2.

c) La solution de l'équation homogène est identique au cas précédent :

$$x_g(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
Pour trouver la solution particulière, on substitue l'ansatz

$$x_p(t) = t(d_1\cos(\omega_0 t) + d_2\sin(\omega_0 t))$$

dans l'équation différentielle pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = d_1\cos(\omega t) + d_2\sin(\omega t) + t(-d_1\omega_0\sin(\omega_0 t) + d_2\omega_0\cos(\omega_0 t))\\
&\ddot{x}(t) = 2t(-d_1\omega_0\sin(\omega_0 t) + d_2\omega_0\cos(\omega_0 t)) - \omega_0^2 t(d_1\cos(\omega_0 t) + d_2\sin(\omega_0 t))\\
&m\ddot{x} + kx - f\cos(\omega_0 t) = 0 \Rightarrow\\
&-2md_1\omega_0\sin(\omega_0 t) + 2md_2\omega_0\cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 mt(d_1\cos(\omega_0 t) + d_2\sin(\omega_0 t)) +\\
&+\omega_0^2 mt(d_1\cos(\omega_0 t) + d_2\sin(\omega_0 t)) - f\cos(\omega_0 t) = 0 \Rightarrow\\
&-2md_1\omega_0\sin(\omega_0 t) + (2md_2\omega_0 - f)\cos(\omega_0 t) = 0.
\end{aligned}$$

Pour que le côté gauche de la dernière équation soit identiquement nul, il faut que les coefficients des termes proportionnels à cos et sin soient nuls :

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{f}{2m\omega_0}.$$

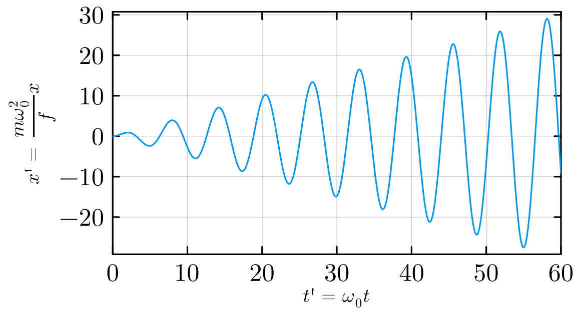


FIGURE 3 – Graphique de la solution de la question A.c (exprimée en quantités adimensionnelles).

En conséquence,

$$x_p(t) = \frac{f}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

A et B sont déterminés par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(t) =& A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{f}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t) \\ x(0) =& A = 0 \\ \dot{x}(0) =& B\omega_0 = 0 \end{aligned}.$$

La trajectoire est donc

$$x(t) = \frac{f}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

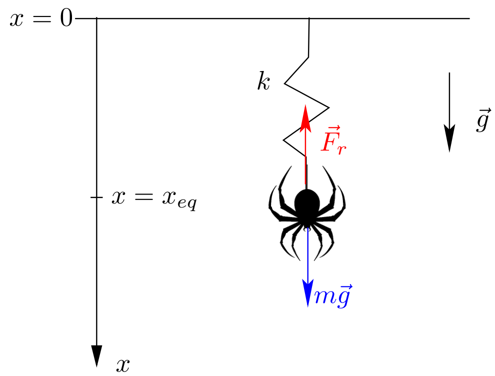
Comme d'habitude, on représente le graphique de la trajectoire en fonction des quantités adimensionnelles $x' = \frac{m\omega^2}{f}x$ et $t' = \omega_0 t$:

$$x'(t') = \frac{1}{2}t' \sin(t').$$

Le graphique de la trajectoire est montré en figure 3.

1 Araignée suspendue à un fil élastique

Vu depuis le référentiel de l'arbre, les positions sur l'axe Ox sont repérées par la coordonnée x comme indiqué sur le dessin.



a) Système étudié : l'araignée.

Forces qui agissent sur l'araignée de masse m :

$$\text{Pesanteur :} \quad m\vec{g} = mg\ \hat{e}_x. \tag{2}$$

$$\text{Force élastique du fil :} \quad \vec{F}_r = -k(x - L)\ \hat{e}_x, \tag{3}$$

où $\hat{e}_x$ indique un vecteur unitaire selon l'axe x.

La position d'équilibre est telle que $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$. Sa projection sur l'axe x donne

$$mg - k(x_{eq} - L) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = L + \frac{mg}{k}.$$

Remarque : il est possible de poser l'origine O à un point different, par exemple au point d'équilibre $x = L$ (appelons cet axe $O'x'$), ou encore au point $x = x_{eq}$ (appelons cet axe $O''x''$). Dans le premier cas, l'expression de la force élastique du fil va changer en $\vec{F}'_r = -k(x' - 0)\hat{e}'_x = -kx'\hat{e}'_x$. Dans le deuxième cas, la variation en x due au ressort sera $\Delta x'' = x'' - x''_0$ avec $x''_0 = -\frac{mg}{k}$ obtenu par le calcul de la position à vide du ressort relative à la position d'équilibre, et $\vec{F}''_r = -k(x'' - x''_0)\hat{e}''_x$. Ces repères sont exactement equivalents cependant les équations seront plus simples à écrire en placant l'origine au point d'attache du ressort.

b) L'équation du mouvement est donnée par la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Avec les forces énoncées plus haut et projetée sur $\hat{e}_x$, elle devient :

$$m\ddot{x} = -kx + kL + mg\ . \tag{4}$$

c) On sait que la solution générale de l'équation différentielle (4) est de la forme $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \bar{x}$. On la dérive deux fois pour obtenir la vitesse et l'accélération de l'araignée

$$\dot{x}(t) = v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{5}$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi). \tag{6}$$

En substituant les expressions de $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans (4) on trouve

$$-mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) + kA\cos(\omega_0 t + \phi) + k\bar{x} - kL - mg = 0 \tag{7}$$

$$\underbrace{\left(-m\omega_0^2 + k\right)}_{=0} A\cos(\omega_0 t + \phi) + \underbrace{k\bar{x} - kL - mg}_{=0} = 0. \tag{8}$$

Comme la relation (8) doit être vérifiée pour chaque t, les deux expressions soulignées doivent indépendamment s'annuler :

$$k\bar{x} - kL - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{mg}{k} + L \tag{9}$$

$$-m\omega_0^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = m\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10}$$

La quantité $\bar{x}$ représente donc la position d'équilibre de l'araignée, alors que ω_0 est bien la pulsation propre dont l'expression correspond à celle vue en cours pour un ressort de raideur k.

d) L'équation du mouvement est la même que dans la question a), (Eq. 4), mais avec un terme supplémentaire pour tenir compte des frottements. La projection de la force de frottement sur l'axe vertical est donnée par $F_x = -\eta\dot{x}$, et l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{x} = -kx + kL + mg - \eta\dot{x}\,. \tag{11}$$

e) Pour répondre à la question, il est nécessaire d'éliminer par un changement de variable les termes constants de l'équation du mouvement. Pour nous guider, l'équation du mouvement peut être récrite

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\left(x - L - \frac{mg}{k}\right) = 0\,. \tag{12}$$

Avec le changement de variable

$$z = x - L - \frac{mg}{k} \tag{13}$$

on a que $\dot{x} = \dot{z}$ et $\ddot{x} = \ddot{z}$, et l'équation du mouvement devient

$$\ddot{z} + \frac{\eta}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0\,. \tag{14}$$

On peut alors identifier les coefficients avec les paramètres γ et ω_0 définis au cours :

$$\gamma = \tfrac{\eta}{2m} \tag{15}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\tfrac{k}{m}}\,. \tag{16}$$

L'oscillation est sous-critique si $\gamma < \omega_0$, d'où on trouve la condition sur le paramètre η :

$$\frac{\eta}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad \eta < 2\sqrt{km}\,. \tag{17}$$

Remarque : puisque $F = \eta\dot{x}$, le paramètre η a comme unité des kilogrammes par seconde, [kg/s], *et l'on peut vérifier que le résultat ci-dessus est consistant car $\sqrt{km}$ a aussi l'unité de* [kg/s].

La pulsation effective de l'oscillation est

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\eta^2}{4m^2}} = \frac{\sqrt{4km - \eta^2}}{2m}\,. \tag{18}$$

f) Dans la solution générale de l'oscillateur harmonique amorti, l'amplitude est proportionnelle à $e^{-\gamma t}$. Au temps $t = 0$, ce facteur vaut 1. Il sera égale à $\frac{1}{2}$ au temps $t_{1/2}$, que l'on peut déterminer comme

$$e^{-\gamma t_{1/2}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad -\gamma t_{1/2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma} = \frac{m}{\eta}2\ln 2\,. \tag{19}$$

Il reste donc maintenant à déterminer le nombre d'oscillations N durant un temps $t_{1/2}$: $N = t_{1/2}\,\nu_1$, où ν_1 est la fréquence effective de l'oscillation. Avec

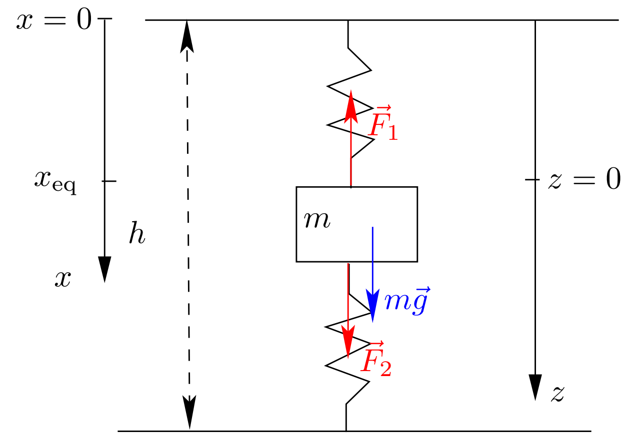
$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{4km-\eta^2}}{2m}\,, \tag{20}$$

on trouve finalement

$$N = t_{1/2}\,\nu_1 = \left(\frac{m}{\eta}2\ln 2\right)\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{4km-\eta^2}}{2m}\right) = \frac{\ln 2}{2\pi}\frac{\sqrt{4km-\eta^2}}{\eta}\,. \tag{21}$$

2 Oscillateur à deux ressorts

a) Les forces qui s'appliquent sur le bloc sont
   - son poids $m\vec{g}$,
   - la force exercée par le premier ressort
   $$\vec{F}_1 = -k_1 x \hat{e}_x,$$
   où $\hat{e}_x$ est un vecteur unitaire selon l'axe x,
   - et la force exercée par le deuxième ressort
   $$\vec{F}_2 = -k_2(x-h)\hat{e}_x.$$



b) L'équation du mouvement est la deuxième équation de Newton. En projection sur l'axe x, elle s'écrit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1 x + k_2(h-x) + mg \\ &= -(k_1+k_2)x + k_2 h + mg \\ m\ddot{x} &+ (k_1+k_2)x - (k_2 h + mg) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Afin de montrer que l'équation (22) correspond à l'équation de l'oscillateur harmonique, on doit faire un changement de variable. Pour cela, on définit un axe z parallèle à l'axe x mais dont l'origine se trouve à la position d'équilibre. La position d'équilibre $x_{\rm eq}$ s'obtient en posant $x = x_{\rm eq}$ et $\ddot{x} = 0$ dans l'équation (22). On obtient ainsi $x_{\rm eq} = \frac{k_2 h + mg}{k_1+k_2}$. Le changement de variable s'écrit :

$$z = x - x_{\rm eq} = x - \frac{k_2 h + mg}{k_1+k_2} \quad\Rightarrow\quad x = z + \frac{k_2 h + mg}{k_1+k_2} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x} = \ddot{z}.$$

On remplace dans l'équation (22) :

$$m\ddot{z} + (k_1+k_2)\left(z + \frac{k_2 h + mg}{k_1+k_2}\right) - (k_2 h + mg) = 0.$$

Après simplification des termes indépendants de z :

$$m\ddot{z} + (k_1+k_2)z = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{z} + \frac{k_1+k_2}{m}z = 0.$$

On reconnait l'équation de l'oscillateur harmonique dont la pulsation est donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m} \quad\Rightarrow\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}. \tag{23}$$

c) Pour le bloc, passer du plafond au point le plus bas consiste à effectuer une demi-période d'oscillation d'un mouvement harmonique, la durée de ce déplacement vaut

$$\Delta t_{x=x_{\max}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}},$$

où T est la période et ω_0 la pulsation de l'oscillateur.
En utilisant le résultat de la partie b), on sait que le point d'équilibre du bloc se trouve à

$$x_{\text{eq}} = \frac{mg+k_2h}{k_1+k_2},$$

et que le mouvement est décrit par

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\text{eq}}.$$

Au temps $t = 0$,

$$v(0) = \dot{x}(0) = 0 = -A\sin(\phi) \Rightarrow \phi = 0 \,\text{ou}\, \pi \tag{24}$$

$$x(0) = x_0 = 0 = A\cos\underbrace{(\phi)}_{=\pi} + x_{\text{eq}} \Rightarrow A = x_{\text{eq}} - x_0\,, \tag{25}$$

où l'on a imposé que le bloc est lâché du plafond (correspondant à $\phi = \pi$) sans vitesse initiale, ce qui correspond à la position la plus éloignée du point d'équilibre. L'amplitude A vaut donc

$$A = x_{\text{eq}} - x_0 = \frac{mg+k_2h}{k_1+k_2},$$

et le mouvement s'écrit :

$$x(t) = \left(\frac{mg+k_2h}{k_1+k_2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t+\phi\right) + \frac{mg+k_2h}{k_1+k_2}.$$

Le maximum $x_{\max}$ de l'amplitude est atteint pour $\cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t+\phi\right) = 1$, d'où

$$x_{\max} = 2\frac{k_2h+mg}{k_1+k_2}.$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}
\Delta t_{x=x_{\max}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} &\simeq \frac{3\times(1+0.05)}{2\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times(1+0.05) \\
&\simeq \frac{1.73}{2}\times(1+0.05) \\
&= 0.86\times(1+0.05) = 0.86+0.04 = 0.90\,\text{s}
\end{aligned}$$

$$x_{\max} = 2\frac{20\times4+10\times10}{100+20} = 2\times\frac{180}{120} = 2\times\frac{3\times\cancel{60}}{2\times\cancel{60}} = 3\text{ m}$$

Remarque : Il est également possible de trouver le même résultat en utilisant la conservation de l'énergie (qui sera vue plus tard en cours). Toutes les forces s'appliquant sur le bloc sont conservatives ;

elles dérivent d'énergies potentielles qui permettent de définir l'énergie mécanique totale du bloc comme

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(h-x)^2 - mgx,$$

où v est la vitesse du bloc. L'énergie potentielle dans le champ de pesanteur vaut $-mgx$ car l'axe x est dirigé vers le bas.
Au départ, en $x = 0$ avec $v = 0$ on a

$$E_i = \frac{1}{2}k_2h^2.$$

Au point le plus bas de la trajectoire (où $v = 0$ également), on a

$$E_f = \frac{1}{2}k_1x_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x_{\max})^2 - mgx_{\max}.$$

Par conservation de l'énergie mécanique $E_i = E_f$:

$$\frac{1}{2}k_1x_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x_{\max})^2 - mgx_{\max} = \frac{1}{2}k_2h^2.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$x_{\max}\left[x_{\max}\frac{k_1+k_2}{2} - (k_2h + mg)\right] = 0.$$

Ses deux solutions sont les coordonnées des points où la vitesse est nulle, soit le point le plus haut de la trajectoire en $x = 0$ et le point le plus bas de la trajectoire en

$$x_{\max} = 2\frac{k_2h + mg}{k_1 + k_2}.$$

3 Ressort dans une boîte

La condition pour que la boîte décolle est que la force de liaison avec la table s'annule. On va donc premièrement considérer le système de la boîte, et observer ce système depuis un référentiel lié à la table. Les forces qui s'appliquent sur la boîte sont :

— son poids $M\vec{g}$,
— la force $\vec{F}_r'$ exercée par le ressort sur la boîte, au point d'attache du ressort,
— et la force de soutien de la table $\vec{N}$ (force de liaison).

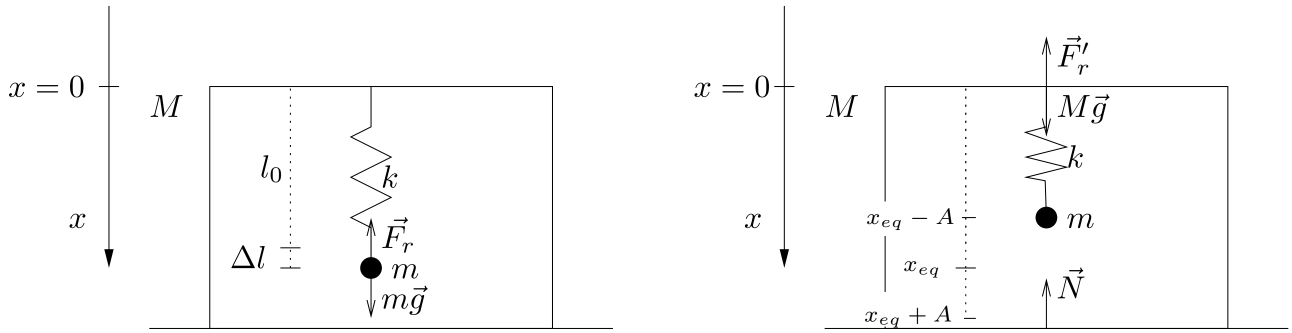
On choisit un axe x dirigé vers le bas avec son origine au point d'attache du ressort, et les forces s'écrivent alors

$$M\vec{g} = Mg\,\hat{e}_x\,, \tag{26}$$

$$\vec{F}_r' = -k(0-(x-l_0))\,\hat{e}_x = k(x-l_0)\,\hat{e}_x\,, \tag{27}$$

$$\vec{N} = N_x\,\hat{e}_x\,, \tag{28}$$

où x est la coordonnée de la position de la bille, et N_x est la composante de la force de soutient sur l'axe x. Quand la boîte est posée sur la table, la projection N_x de la force de soutient est strictement negative (i.e. dirigée vers le haut). La boîte décolle si la table ne la soutient plus, autrement dit si la force de liaison devient nulle : $N_x = 0$.



La condition d'équilibre de la boîte (2ème loi de Newton avec accélération nulle) s'écrit :

$$\vec{F}_r' + M\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}. \tag{29}$$

En projetant la condition d'équilibre (29) sur l'axe x on obtient :

$$k(x - l_0) + Mg + N_x = 0, \tag{30}$$

et donc

$$N_x = -k(x - l_0) - Mg. \tag{31}$$

La condition $N_x < 0$ pour que la boîte ne décolle pas implique alors

$$x > l_0 - \frac{Mg}{k}. \tag{32}$$

Donc, la boîte décolle si

$$x \leq l_0 - \frac{Mg}{k}. \tag{33}$$

Pour relier cette position de la bille avec l'amplitude A de son oscillation, on considère maintenant le système de la bille, soumise à son poids, $m\vec{g} = mg\,\hat{e}_x$, et la force du ressort, $\vec{F}_r = -k(x - l_0)\,\hat{e}_x$. Son oscillation se fait autour de sa position d'équilibre x_{eq}, que l'on va maintenant chercher à déterminer. A l'équilibre (figure de gauche), la position de la bille est x_{eq}. La deuxième loi de Newton appliquée à la bille donne $\vec{F}_r + m\vec{g} = \vec{0}$. En projection sur l'axe x,

$$-k(x_{eq} - l_0) + mg = 0,$$

d'où

$$x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}. \tag{34}$$

Lorsqu'elle est en mouvement, la bille suit un mouvement oscillatoire harmonique. Elle effectue des oscillations d'amplitude A autour de la position d'équilibre x_{eq}. La figure de droite montre la position d'équilibre et les positions des maxima de l'oscillation à $x_{eq} - A$ et $x_{eq} + A$.
En combinant la condition donnée par l'équation (33) et le fait que $x \geq x_{eq} - A$ (la position x est toujours plus grande que la valeur minimale possible $x_{eq} - A$), l'amplitude A doit satisfaire

$$x_{eq} - A \leq x \leq l_0 - \frac{Mg}{k}, \tag{35}$$

d'où on trouve, en utilisant l'équation (34) :

$$A \geq \Delta l + \frac{Mg}{k} = \frac{(m + M)g}{k}. \tag{36}$$

Remarque : Un raisonnement plus court et intuitif permet de vérifier ce résultat. Pour une certaine amplitude A de l'oscillation, la force maximale exercée par le ressort sur la boîte est atteinte au sommet de la trajectoire de la bille. La longueur du ressort vaut alors $l_{\min} = x_{eq} - A = l_0 + \frac{mg}{k} - A$, et l'élongation vaut :

$$\Delta l = l_{\min} - l_0 = \frac{mg}{k} - A$$

Pour que la force sur la boîte soit dirigée vers le haut, il faut que le ressort soit comprimé, c'est à dire $\Delta l < 0$, d'où $\frac{mg}{k} - A < 0$ et ainsi en valeur absolue $|\frac{mg}{k} - A| = A - \frac{mg}{k}$. La norme de la force sur la boîte (dirigée vers le haut) est alors $k(A - \frac{mg}{k}) = kA - mg$, et la boite décolle si cette norme dépasse celle du poids de la boîte Mg (dirigé vers le bas) :

$$kA - mg \geq Mg \qquad \Rightarrow \qquad A \geq \frac{(m+M)g}{k}$$