Corrigé de la série 2

A. Introduction aux équations différentielles

Les équations 0.a) jusqu'à 0.d) sont toutes sous la forme

$$\ddot{x}(t) = f(t). \tag{1}$$

Pour les résoudre, il suffit de trouver une primitive $F(t)$ de $f(t)$, puis une primitive $G(t)$ de $F(t)$. En effet, la solution générale pour $\dot{x}$ est alors :

$$\dot{x}(t) = F(t) + c, \quad c = \text{ constante}$$

et la solution générale pour x est donnée par :

$$x(t) = G(t) + ct + d, \quad d = \text{ constante}$$

puisque $G(t) + ct$ est une primitive de $F(t) + c$. Les constantes c et d sont ensuite fixées par les conditions initiales. En appliquant ce raisonnement aux cas 0.a-d), on obtient :

a)

$$F(t) = at$$
$$G(t) = \frac{at^2}{2}$$
$$x(t) = \frac{at^2}{2} + x_0 + v_0 t$$

b)

$$F(t) = at + \frac{bt^2}{2}$$
$$G(t) = \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{6}$$
$$x(t) = \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{6} + x_0 + v_0 t$$

c)

$$F(t) = \frac{a}{\omega}\sin(\omega t + \phi)$$
$$G(t) = -\frac{a}{\omega^2}\cos(\omega t + \phi)$$
$$x(t) = -\frac{a}{\omega^2}\cos(\omega t + \phi) + \frac{a}{\omega^2}\cos(\phi) + x_0 + \left(v_0 - \frac{a}{\omega}\sin(\phi)\right) t$$

d)

$$F(t) = \frac{2a}{3}t^{3/2} - \frac{b}{\lambda}e^{-\lambda t}$$
$$G(t) = \frac{4a}{15}t^{5/2} + \frac{b}{\lambda^2}e^{-\lambda t}$$
$$x(t) = \frac{4a}{15}t^{5/2} + \frac{b}{\lambda^2}e^{-\lambda t} + x_0 - \frac{b}{\lambda^2} + \left(v_0 + \frac{b}{\lambda}\right) t$$

e) i) En substituant $x(t) = e^{\gamma t}$ dans l'équation différentielle, on obtient

$$\begin{aligned} &m\gamma^2 e^{\gamma t} + b\gamma e^{\gamma t} + ke^{\gamma t} = 0 \\ &m\gamma^2 + b\gamma + k = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation du second degré est

$$\Delta = b^2 - 4km.$$

Par hypothèse, il est toujours positif. Il y a donc deux valeurs possibles pour γ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \\ \gamma_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \end{aligned}$$

ii) Le résultat est une conséquence de la linéarité de l'opération de différentiation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f_1(t) + f_2(t)) &= \frac{d}{dt}f_1(t) + \frac{d}{dt}f_2(t) \implies \\ \frac{d^2}{dt^2}(f_1(t) + f_2(t)) &= \frac{d^2}{dt^2}f_1(t) + \frac{d^2}{dt^2}f_2(t). \end{aligned}$$

En utilisant cette propriété, on obtient

$$\begin{aligned} &\left(m\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + k\right)(Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t}) = \\ =&A\left(m\frac{d^2}{dt^2}e^{\gamma_1 t} + b\frac{d}{dt}e^{\gamma_1 t} + ke^{\gamma_1 t}\right) + B\left(m\frac{d^2}{dt^2}e^{\gamma_2 t} + b\frac{d}{dt}e^{\gamma_2 t} + ke^{\gamma_2 t}\right) = 0. \end{aligned}$$

iii) Il faut trouver A et B tels que $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x(0) = A + B = x_0 \\ \dot{x}(0) = A\gamma_1 + B\gamma_2 = v_0 \end{cases} \\ &\begin{cases} A = x_0 - B \\ (x_0 - B)\gamma_1 + B\gamma_2 = v_0 \end{cases} \\ &\begin{cases} A = \frac{v_0 - \gamma_2 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} \\ B = \frac{v_0 - \gamma_1 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1} \end{cases} \end{aligned}.$$

La solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales est donc

$$x(t) = \left(\frac{v_0 - \gamma_2 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2}\right)e^{\gamma_1 t} + \left(\frac{v_0 - \gamma_1 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1}\right)e^{\gamma_2 t}. \tag{2}$$

B. Blocs en mouvement

La figure nous indique que les positions successives des deux blocs, à des intervalles de temps réguliers, sont séparées par une même distance. On en déduit que la vitesse de chaque bloc est constante et donc que leurs accélérations sont nulles, donc égales.

C. Vaisseau spatial

Soit x un axe parallèle à PQ et y un axe perpendiculaire à PQ, dans la direction de l'accélération durant la deuxième phase du mouvement. La composante x de la vitesse du vaisseau, v_x, doit rester constante, car il n'y a jamais d'accélération selon x. Les trajectoires 1 et 2, qui correspondent à une vitesse v_x qui s'annule tout à coup au point Q, ne sont donc pas possibles. Après le point Q, la trajectoire doit correspondre à celle d'un mouvement uniformément accéléré, c'est-à-dire à une parabole. Les trajectoires 2, 3, et 4 ne sont manifestement pas paraboliques. La seule possiblité est donc la trajetoire 5, qui est parabolique dès le point Q et compatible avec une vitesse v_x constante.

D. Mouvement unidimensionnel

Equation de Newton pour $t > 0$: $\vec{f} = m\vec{a}$. Selon $\vec{e}_x$: $-f_0 = ma \Longleftrightarrow a = -\dfrac{f_0}{m}$.

C'est un mouvement uniformément accéléré. Avec les conditions initiales $v(0) = v_0$ (la vitesse est v_0 à l'instant où le freinage commence) et $x(0) = 0$ (la position nulle à l'instant où le freinage commence),

$$v(t) = \begin{cases} v_0 & \text{si } t < 0 \\ -\dfrac{f_0}{m}t + v_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} v_0 t & \text{si } t < 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_0}{m}t^2 + v_0 t & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$

Remarque : ce modèle de force de freinage atteint sa limite de validité au plus tard lorsque l'objet s'arrête !

1 Saut du saumon

a) On part de l'équation du mouvement

$$\ddot{x}(t) = a,$$

que l'on l'intègre une fois pour trouver la vitesse au cours du temps

$$\dot{x}(t) = at + cte. \tag{3}$$

Pour déterminer à quoi correspond la constante d'intégration, on évalue l'expression (3) à l'instant $t = 0$:

$$\dot{x}(t = 0) = 0 + cte.$$

La constante est donc égale à la vitesse évaluée à l'instant $t = 0$. On notera cette vitesse initiale v_0. On intègre une deuxième fois pour trouver la position au cours du temps

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + cte'. \tag{4}$$

On évalue ici encore cette expression en $t = 0$ pour trouver à quoi correspond la constante d'intégration

$$x(t = 0) = 0 + 0 + cte'.$$

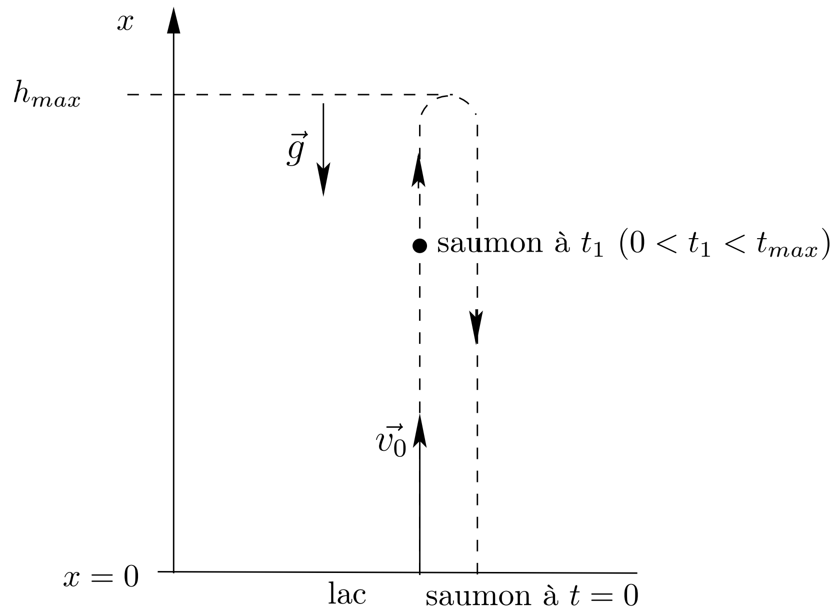
La constante est égale à la position évaluée en $t = 0$. Il s'agit de la position initiale, notée x_0. Au final, la solution de l'équation du mouvement $\ddot{x}(t) = a$ s'écrit bien $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ où v_0 et x_0 représentent respectivement la vitesse et la position initiales.
Pour vérifier que la solution $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ satisfait bien l'équation $\ddot{x} = a$ on calcule

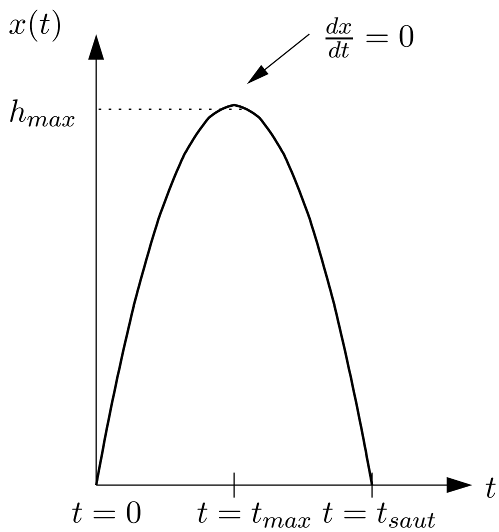
$$\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0\right)$$

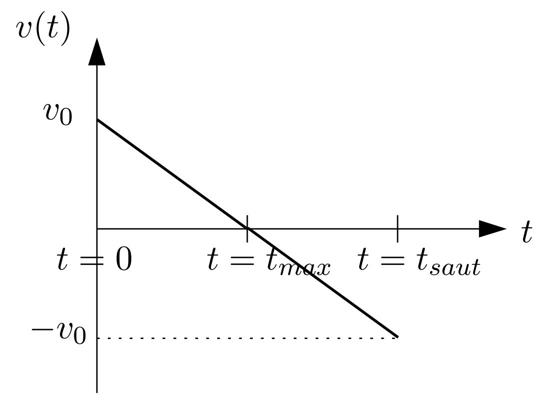
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}a2t + v_0\right) = \frac{d}{dt}\left(at + v_0\right) = a.$$

L'équation du mouvement rectiligne uniformément accéléré est donc bien vérifiée.

b) **Compréhension de l'énoncé :** La manière la plus efficace de comprendre le problème est de représenter la donnée dans un *grand* dessin comprenant toutes les indications de la donnée (voir ci-dessous). Le système que l'on considère est le saumon, et on l'observe depuis la bord du lac (référentiel). On choisit un axe x vertical dirigé vers le haut, ayant son origine à la surface de l'eau. A l'instant $t = 0$, le saumon sort du lac en $x_0 = 0$ avec une vitesse v_0 verticale, dirigée vers le haut. Tout au long du saut, il subit une accélération $-g$ due à la pesanteur. Sa position au cours du temps est donnée par l'équation (4) et sa vitesse au cours du temps par l'équation (3) dans lesquelles on pose $a = -g$.







Graphiquement, la position et la vitesse au cours du temps sont données dans les deux figures ci-dessus. On peut remarquer que :

— La position au cours du temps est donnée par un polynôme du deuxième degré. Graphiquement, on a donc une parabole.
— Le sommet de la parabole correspond à l'altitude maximale atteinte par le saumon, à un instant que l'on nomme $t = t_{\text{max}}$.
— La vitesse diminue linéairement. Graphiquement, elle est représentée par une droite. La pente de cette droite est égale à l'accélération du saumon.
— A l'instant t_{max}, la droite croise l'abscisse : la vitesse du saumon est nulle au sommet de la trajectoire. En tout point, la vitesse correspond à la dérivée de la position par rapport au temps. A l'instant t_{max}, une vitesse nulle correspond donc au sommet de la parabole, de pente nulle.
— La parabole est symétrique. Soit t_{saut} l'instant où le saumon retombe dans l'eau. On a $x(t_{\text{saut}}) = 0$ et $t_{\text{max}} = \frac{1}{2}t_{\text{saut}}$.

c) — **Démarche(s) de résolution :** On cherche à déterminer la hauteur maximale atteinte par le saumon et le temps qu'il passera en l'air. Pour y arriver, la démarche consiste à :

- Intégrer une première fois l'équation du mouvement $\ddot{x}(t) = a$ pour trouver la vitesse au cours du temps, puis une deuxième fois pour trouver la position au cours du temps.
- Utiliser les conditions aux limites pour résoudre ces équations.

— **Choix d'une démarche et résolution :** La première partie de la démarche a été effectuée dans la question a) de cet exercice. On utilise donc les équations (3) et (4) pour lesquelles $a = -g$ et $x_0 = 0$:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad \text{et} \quad v(t) = -gt + v_0.$$

Au sommet de la trajectoire (condition finale), le saumon atteint une hauteur $x(t_{\text{max}}) = h_{\text{max}}$ au temps t_{max}. A cet instant, sa vitesse est nulle : $v(t_{\text{max}}) = 0$.

$$-gt_{\text{max}} + v_0 = 0 \Rightarrow t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}.$$

En injectant ce résultat dans l'équation de la position au cours du temps, on obtient

$$h_{\text{max}} = -\frac{1}{2}gt_{\text{max}}^2 + v_0 t_{\text{max}} = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} + v_0\frac{v_0}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

On calcule t_{saut} en utilisant la condition finale $x(t_{\text{saut}}) = 0$:

$$-\frac{1}{2}gt_{\text{saut}}^2 + v_0 t_{\text{saut}} = 0 \Rightarrow t_{\text{saut}} = 0(\text{solution à éviter}) \text{ ou } t_{\text{saut}} = \frac{2v_0}{g}.$$

Ce résultat confirme que $t_{\text{max}} = \frac{1}{2}t_{\text{saut}}$, comme on s'y attendait.

Application numérique :
$v_0 = 3\,\text{m/s}$ et $g = 10\,\text{m/s}^2$ donc $t_{\text{saut}} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\times3}{10} = 0.6\,\text{s}$ et $h_{\text{max}} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{3^2}{2\times10} = 0.45\,\text{m}$.

— **Discussion des solutions :** La solution trouvée…

- …a les bonnes unités : pour t_{saut}, on s'attend à un résultat en secondes. $\frac{2v_0}{g} \rightarrow \frac{m/s}{m/s^2} = \frac{m}{s}\frac{s^2}{m} = s$. Pour h_{max}, on s'attend à un résultat en mètres. $\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \rightarrow \frac{(m/s)^2}{m/s^2} = \frac{m^2}{s^2}\frac{s^2}{m} = m$.

- …a le bon ordre de grandeur : $v_0 \simeq 10^0$ m/s et $g \simeq 10^1$ m/s^2. On a donc $t_{\text{saut}} = \frac{2v_0}{g} \simeq \frac{10^0}{10^1} \simeq 10^{-1}$ s et $h_{\text{max}} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \simeq \frac{10^0}{10^1} \simeq 10^{-1}$ m. Il paraît effectivement raisonnable que le saumon saute à quelques dizaines de centimètres et que ce saut dure quelques dixièmes de secondes.

- …a les bons signes : h_{max} doit être positif, car il se situe à une valeur positive sur l'axe vertical (voir dessin). On a bien $\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} > 0$. De plus, t_{saut} doit être positif, car le saumon retombe dans l'eau après avoir sauté. On a bien $\frac{2v_0}{g} > 0$.

- …est cohérente avec les cas limites. Si $v_0 \rightarrow \infty$ (le saumon saute avec une très grande vitesse) on a $h_{\text{max}} \rightarrow \infty$ (il atteint une hauteur très importante) et $t_{\text{saut}} \rightarrow \infty$ (ce saut dure un temps très long). On peut faire un raisonnement similaire avec $v_0 \rightarrow 0$.

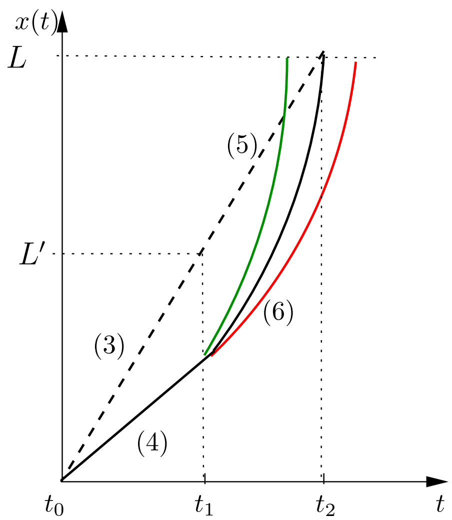
2 Le lièvre et la tortue

On définit les temps suivants

— $t_0 = 0$, l'instant du départ,
— t_1, l'instant auquel la tortue atteint le pont et où le lièvre commence à accélérer,
— t_2 l'instant de l'arrivée de la tortue,
— et les intervalles de temps $\Delta t = t_1 - t_0$ et $\Delta t' = t_2 - t_1$.

Dans la résolution de ce problème, on considère deux systèmes différents, le lièvre ou la tortue, et on mesure leur position par rapport au sol (référentiel). L'axe x est dirigé dans le sens de la course.

a) Sur le graphique ci-dessous, la ligne traitillée représente la position de la tortue en fonction du temps et les lignes pleines celles du lièvre selon son accélération a à partir du temps t_1 : la ligne verte correspond à une accélération suffisamment grande pour arriver avant la tortue tandis que dans le cas de la ligne rouge, l'accélération est trop petite. La ligne noire représente l'accélération minimale pour arriver en même temps que la tortue. Les numéros entre parenthèses se rapportent aux équations ci-dessous.



b) Dans la première partie de la course (de t_0 à t_1), la tortue parcourt une distance $x_\mathrm{t} = L'$ en un temps Δt, à la vitesse v_t :

$$x_\mathrm{t}(t_1) = L' = v_\mathrm{t}\Delta t. \tag{5}$$

Pendant ce temps, le lièvre parcourt une distance x_l inférieure à L', à la vitesse v_l :

$$x_\mathrm{l}(t_1) = v_\mathrm{l}\Delta t. \tag{6}$$

Dans la deuxième partie, la tortue continue son trajet, d'une durée $\Delta t'$, à la même vitesse v_t :

$$x_\mathrm{t}(t_2) \equiv L = v_\mathrm{t}\Delta t' + L'. \tag{7}$$

Pendant ce temps $\Delta t'$, le lièvre accélère avec une accélération a et lorsque la tortue franchira la ligne d'arrivée au temps t_2, le lièvre se trouvera en

$$x_\mathrm{l}(t_2) = \frac{1}{2}a\Delta t'^2 + v_\mathrm{l}\Delta t' + x_\mathrm{l}(t_1) \tag{8}$$

Le lièvre et la tortue seront ex-aequo si $x_\mathrm{l}(t_2) = L$.

Donc l'équation (8) se récrit

$$a = \frac{2\Big(- v_l \Delta t' - x_l(t_1) + L \Big)}{(\Delta t')^2}. \tag{9}$$

De (7), on tire $\Delta t' = \frac{L-L'}{v_t}$. On combine aussi (5) et (6) pour obtenir $x_l(t_1) = \frac{v_l}{v_t} L'$, ce qui, injecté dans (9), donne

$$a = \frac{2\left(- \frac{v_l}{v_t}(L-L') - \frac{v_l}{v_t} L' + L \right)}{\left(\frac{L-L'}{v_t} \right)^2}$$

et après simplification

$$a = \frac{2 v_t L (v_t - v_l)}{(L-L')^2}. \tag{10}$$

Le lièvre remporte donc la course si $a > \frac{2 v_t L (v_t - v_l)}{(L-L')^2}$.

- Solutions alternative

La difficulté principale de l'exercice réside dans le fait qu'il faut considérer plusieurs origines des temps. Vous avez appris que l'équation différentielle

$$\frac{d^2 x\,(t)}{dt^2} = a\,,$$

où a est une constante, admet comme solution générale

$$x\,(t) \;\; = \;\; \frac{1}{2} a t^2 + c_1 t \;\; + \;\; c_2\,,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration que vous identifiez avec la vitesse et la position initiale. Un petit point sur les équations différentielles, que vous étudierez bientôt de manière bien plus extensive, est que la solution d'une équation du second ordre (avec des dérivées secondes) n'est unique que si vous imposez des conditions initiales (position et vitesse initiales) à un certain temps $t = t_0$. Lorsque $t_0 = 0$, vous pouvez rapidement vérifier qu'en effet c_1 et c_2 correspondent à la vitesse et la position initiale, mais ce n'est pas le cas général. Une manière pratique d'écrire la solution générale est

$$x\,(t) \;\; = \;\; \frac{1}{2} a\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + x_0\,,$$

qui est solution du problème

$$\frac{d^2 x\,(t)}{dt^2} = a, \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}\,(t_0) = v_0\,,$$

dont la solution est unique grâce aux conditions initiales. Vous pouvez facilement vérifier cette solution, et aussi qu'elle se ramène à la solution habituelle si $t_0 = 0$.

En adoptant ce point de vue, il est aisé de traiter le mouvement du lièvre.
Lorsque $t < t_1 = L'/v_t$, le mouvement du lièvre est solution de

$$\frac{d^2x_l\,(t)}{dt^2} = 0, \quad x_l(0) = 0, \quad \frac{dx_l}{dt}\,(0) = v_l\,,$$

et la solution est donnée par

$$x_l\,(t) = v_l\; t\,.$$

Pour $t > L'/v_t$, le mouvement du lièvre est maintenant solution de

$$\frac{d^2x_l\,(t)}{dt^2} = a, \quad x_l(\frac{L'}{v_t}) = \frac{v_l}{v_t}L', \quad \frac{dx_l}{dt}\left(\frac{L'}{v_t}\right) = v_l\,,$$

où les conditions initiales à $t = t_1 = L'/v_t$ sont obtenues en utilisant la solution pour $t < t_1$ évaluée à t_1 (la position du lièvre et sa vitesse sont des fonctions continues). La solution est donc

$$x_l\,(t) \;=\; \frac{1}{2}a\left(t - \frac{L'}{v_t}\right)^2 + v_l\left(t - \frac{L'}{v_t}\right) + \frac{v_l}{v_t}L'\,.$$

La condition de victoire du lièvre est $x_l(t_2) > L$, avec $t_2 = L/v_t$ étant le temps auquel la tortue finit la course, d'où on obtient

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{L}{v_t} - \frac{L'}{v_t}\right)^2 + v_l\left(\frac{L}{v_t} - \frac{L'}{v_t}\right) + \frac{v_l}{v_t}L' > L$$

qui vous donne la condition sur l'accélération a après avoir simplifié cette expression.

c) Vérification des résultats

— Le résultat obtenu en (10) est une accélération. Vérifions que la dimension de l'expression obtenue correspond bien à des $\frac{m}{s^2}$.

$$a = \frac{2v_\mathrm{t}L(v_\mathrm{t} - v_\mathrm{l})}{(L - L')^2} : \frac{[\frac{m}{s}][m][\frac{m}{s}]}{[m^2]} = \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

— On vérifie aussi que les termes additionnés ou soustraits ont tous la même unité. Cette vérification est ici triviale. Au numérateur, on a le terme $(v_\mathrm{t} - v_\mathrm{l})$, qui contient deux vitesses. Au dénominateur, $(L - L')$ qui contient deux longueurs.

— Si la tortue a une vitesse beaucoup plus grande que celle du lièvre (avant le pont), on s'attend à ce que l'accélération du lièvre doive être très grande pour qu'il arrive à combler son retard. Mathématiquement, on écrit $v_\mathrm{t} \to \infty$ et on a bien que

$$\lim_{v_\mathrm{t}\to\infty} \frac{2v_\mathrm{t}L(v_\mathrm{t} - v_\mathrm{l})}{(L - L')^2} = \infty$$

— Si la tortue a une vitesse égale à celle du lièvre (avant le pont), on s'attend à ce que le lièvre n'ait pas besoin d'accélérer pour remporter la course. Il lui suffit de continuer à vitesse constante. Mathématiquement, on écrit $(v_\mathrm{t} - v_\mathrm{l}) \to 0$ et on a bien que

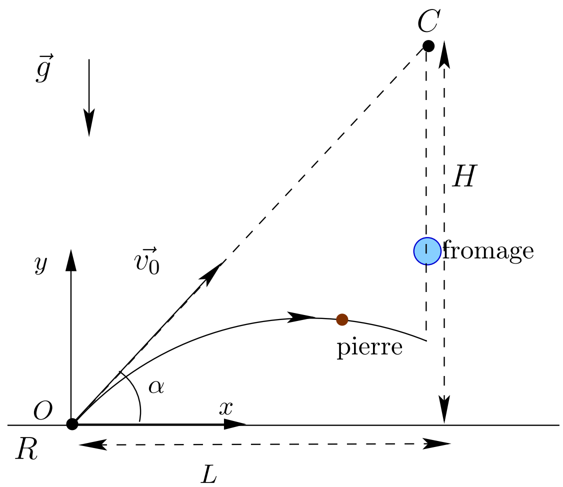
$$\lim_{(v_\mathrm{t}-v_\mathrm{l})\to 0} \frac{2v_\mathrm{t}L(v_\mathrm{t} - v_\mathrm{l})}{(L - L')^2} = 0$$

— Si le pont se situe très près de la ligne d'arrivée, le chemin restant est trop court pour laisser au lièvre le temps de rattraper la tortue. On s'attend à ce que a soit très grand. Mathématiquement, on écrit $(L - L') \to 0$ et on a bien que

$$\lim_{(L-L')\to 0} \frac{2v_\mathrm{t} L(v_\mathrm{t} - v_\mathrm{l})}{(L - L')^2} = \infty$$

3 Le corbeau et le renard

Un schéma regroupant toutes les informations disponibles est donné dans la donnée de l'exercice. On lui ajoute un repère Oxy où l'origine O est la position du renard, ainsi que l'angle α de la direction de la vitesse initiale v_0 relativement à l'axe x.



a) Les conditions initiales sont [1] :

— pour la pierre :

$$\text{position : } \begin{cases} x_0^P = 0 \\ y_0^P = 0 \end{cases} \qquad \text{vitesse : } \begin{cases} v_{x,0}^P = v_0 \cos\alpha \\ v_{y,0}^P = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

— pour le fromage :

$$\text{position : } \begin{cases} x_0^F = L \\ y_0^F = H \end{cases} \qquad \text{vitesse : } \begin{cases} v_{x,0}^F = 0 \\ v_{y,0}^F = 0. \end{cases}$$

La pierre (premier système considéré) et le fromage (second système considéré) étant uniquement soumis à l'accélération de la pesanteur, les équations du mouvement pour ces deux systèmes sont données par la deuxième loi de Newton (loi applicable dans ce problème) :

$$\ddot{\vec{r}}^P(t) = \vec{g} \qquad \text{et} \qquad \ddot{\vec{r}}^F(t) = \vec{g} \qquad \text{avec} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

En projetant ces deux équations sur le repère Oxy, on obtient 4 équations du mouvement :

1. Pour alléger les notations, on a remplacé $||\vec{v}_0||$ par v_0

— Equation de la pierre projetée sur l'axe Ox horizontal :

$$\ddot{x}^P(t) = 0.$$

On l'intègre une fois

$$\dot{x}^P(t) = cte.$$

La condition initiale $v^P_{x,0} \equiv \dot{x}^P(t = t_0) = v_0 \cos\alpha$ donne la constante

$$\dot{x}^P(t) = v_0 \cos\alpha.$$

On intègre une deuxième fois pour trouver la position.

$$x^P(t) = (v_0 \cos\alpha)t + cte'.$$

La condition initiale $x^P_0 = 0$ nous donne $cte' = 0$ et donc

$$x^P(t) = (v_0 \cos\alpha)t.$$

— Equation de la pierre projetée sur Oy :

$$\ddot{y}^P(t) = -g.$$

On l'intègre une fois et on utilise la condition initiale $v^P_{y,0} = v_0 \sin\alpha$

$$\dot{y}^P(t) = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

On l'intègre une deuxième fois et on utilise la condition initiale $y^P_0 = 0$

$$y^P(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t.$$

— Equation du fromage projetée sur Ox et Oy : De la même manière, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{x}^F(t) = 0 \\ \ddot{y}^F(t) = -g \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{x}^F(t) = 0 \\ \dot{y}^F(t) = -gt \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x^F(t) = L \\ y^F(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H. \end{array}\right.$$

Il y a une collision entre la pierre et le fromage si pour un temps $t = t_{coll}$ ils se trouvent à la même position, c'est-à-dire, si on a les conditions

$$x^P(t_{coll}) = x^F(t_{coll}) \qquad \text{ET} \qquad y^P(t_{coll}) = y^F(t_{coll}). \tag{11}$$

La condition $x^P(t_{coll}) = x^F(t_{coll})$ donne

$$(v_0 \cos\alpha)t_{coll} = L \Rightarrow t_{coll} = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_0}. \tag{12}$$

La condition $y^P(t_{coll}) = y^F(t_{coll})$ donne

$$-\frac{1}{2}gt^2_{coll} + (v_0 \sin\alpha)t_{coll} = -\frac{1}{2}gt^2_{coll} + H \Rightarrow t_{coll} = \frac{H}{v_0 \sin\alpha} = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_0}. \tag{13}$$

On a utilisé $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{H}{L}$. Les solutions (12) et (13) sont identiques, on a donc bien une collision entre la pierre et le fromage au temps

$$t_{coll} = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_0}. \tag{14}$$

On voit que l'expression obtenue pour t_{coll} ne dépend pas de g : l'effet de g est d'accélérer les deux objets verticalement de la même manière (terme en $-\frac{1}{2}gt^2$), ce qui n'influe pas sur le mouvement horizontal, et donc pas sur t_{coll}.
La direction du tir du renard est déterminée par l'angle α. Quand $\alpha \neq \arctan(H/L)$, les équations (12), (13) sont inconsistantes et une solution pour l'équation (11) n'existe pas. On conclut donc que la pierre ne rentre pas en collision avec le fromage si le renard vise à côté du corbeau.

b) Nous venons de prouver que la pierre entre forcément en collision avec le fromage, sans poser de condition sur la vitesse initiale v_0 (surprenant, non ?) Il y a cependant une restriction à poser : si la vitesse initiale v_0 de la pierre n'est pas assez grande, le fromage touchera le sol avant que la collision n'ait eu lieu. Ceci n'est pas en contradiction avec le raisonnement précédent ; la collision a lieu pour $y < 0$. Autrement dit, elle a lieu "dans le sol", il suffirait de creuser un trou suffisamment profond pour pouvoir l'observer.

Pour que la collision ait lieu au-dessus du sol, on doit avoir $y^F(t_{coll}) > 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} y^F(t_{coll}) &= -\frac{1}{2}gt_{coll}^2 + H > 0 \\ \Rightarrow H &> \frac{1}{2}gt_{coll}^2 = \frac{1}{2}g\frac{L^2 + H^2}{v_0^2} \\ \Rightarrow v_0 &> \sqrt{g\frac{L^2 + H^2}{2H}}. \end{aligned} \tag{15}$$

c) Vérifions que les résultats trouvés ont les bonnes dimensions.
— Equation 14 : $t_{coll} = \frac{\sqrt{L^2+H^2}}{v_0} : \frac{\left([m]^2\right)^{1/2}}{[m/s]} = \frac{[\cancel{m}]}{[\cancel{m}/s]} = [s]$. On obtient bien la dimension d'un temps.
— Equation 15 : $v_0 > \sqrt{g\frac{L^2+H^2}{2H}} : \left([m/s^2]\frac{[m]^2}{[m]}\right)^{1/2} = \frac{\cancel{[m]^{1/2}}[m]}{[s]\cancel{[m]^{1/2}}}$. On obtient bien la dimension d'une vitesse.

Regardons quelques cas limites pour vérifier que l'on obtient bien ce à quoi on s'attend.
— Si v_0 tend vers l'infini, t_{coll} doit tendre vers zéro (Eq.14) et la collision aura lieu au dessus du sol (Eq.15)
— Si v_0 tend vers zéro, t_{coll} doit tendre vers l'infini (Eq.14) et la collision ne peut se passer au-dessus du sol car Eq.15 n'est jamais satisfaite.
— Si g tend vers zéro, le membre de droite de l'Eq.15 tend vers zéro, donc la collision a toujours lieu au-dessus du sol quel que soit $v_0 > 0$.
— si H tend vers zéro, le membre de droite de l'Eq.15 tend vers l'infini, donc la collision ne peut pas avoir lieu au-dessus du sol.

4 Le canard paresseux

a) On nous dit que le canard a un mouvement rectiligne. On traite donc le problème dans un repère à une dimension, selon un axe (Ox) de vecteur unitaire $\hat{e}_x$, dirigé dans la direction dans laquelle va le canard. On notera $\vec{a} = a_x(t)\hat{e}_x, \vec{v} = v_x(t)\hat{e}_x, \vec{r} = x(t)\hat{e}_x$, ses vecteurs accélération, vitesse et position, respectivement. La seule force agissant sur le canard ayant une composante sur $\hat{e}_x$ est la force de frottement de l'eau en écoulement laminaire, $\vec{F} = -b\,v_x(t)\hat{e}_x$. La pesanteur et la poussée d'Archimède sont dirigées selon l'axe vertical et leur somme vectorielle est nulle.
La projection de la deuxième loi de Newton selon $\hat{e}_x$ donne :

$$ma_x(t) = -bv_x(t) \quad \Longrightarrow \quad a_x(t) = -\frac{b}{m}v_x(t)$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\dot{v_x}}{v_x} = -\frac{1}{\tau}$$

avec $\tau = \frac{m}{b}$

b) i. On sait que la dérivée du logarithme d'une fonction u est donnée par $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, ce qui permet d'écrire l'équation du mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln v_x] = -\frac{1}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad \ln v_x = -\frac{t}{\tau} + A$$

En fixant $t = 0$ on obtient la constante d'intégration $A = \ln v_0$, puis en prenant l'exponentielle

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = v_0 \exp(-t/\tau)$$

(on constate que $\tau = m/b$ est le temps caractéristique, qui est d'autant plus court que b est grand)
ii. On peut désormais intégrer des deux côtés entre $t = 0$ et t pour obtenir la position en fonction du temps :

$$x(t) - x(0) = \int_{t=0}^{t} v_x(t)dt = \int_0^t v_0 e^{-t/\tau} dt = -v_0\tau \left[e^{-t/\tau}\right]_0^t = v_0\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

c) Puisque $v_x(t) = v_0 \exp(-t/\tau)$ le canard devient immobile dans la limite $t \to \infty$. La distance alors parcourue D s'obtient en prenant cette limite dans l'expression de la position :

$$D = \lim_{t\to\infty}(x(t) - x_0) = v_0\tau = \frac{m\,v_0}{b}$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette distance augmente avec m et v_0 (quantité de mouvement initiale) et diminue si b augmente (plus de frottements).