Corrigé Série 1 : Rappels mathématiques

1 Dérivation des fonctions

1. $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$
2. $\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$
3. (*) $\frac{d}{dt}\tan(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)' = \frac{\cos(t)\cos(t)+\sin(t)\sin(t)}{\cos(t)^2} = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1+\tan^2(t)$
4. $\frac{d}{dt}\ln(t) = \frac{1}{t}$
5. $\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$
6. $\frac{d}{dt}t^{\alpha} = \alpha t^{\alpha-1}$
7. $\frac{d}{dt}\sin(t)\cos(t) = \sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
8. $\frac{d}{dt}t\cos(t) = \cos(t) - t\sin(t)$
9. (**) $\frac{d}{dt}t\cos(t)\sin(t) = \cos(t)\sin(t) - t\sin^2(t) + t\cos^2(t)$
10. $\frac{d}{dt}\sin(t^2) = 2t\cos(t^2)$

$*(\frac{f}{g})' = (f\cdot\frac{1}{g})' = f\cdot(\frac{1}{g})' + f'\cdot\frac{1}{g} = f(\frac{-g'}{g^2}) + \frac{f'}{g} = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

$**(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

2 Dérivation des fonctions composées

1. $\frac{d}{d\theta}\cos(\theta) = -\sin\theta \quad ; \quad \frac{d}{dt}\cos(\theta) = \dot{\theta}(-\sin\theta) = -\omega\sin\theta$
2. $\frac{d}{d\theta}\sin(\theta) = \cos\theta \quad ; \quad \frac{d}{dt}\sin(\theta) = \omega\cos\theta$
3. $\frac{d}{d\theta}\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2}) \quad ; \quad \frac{d}{dt}\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{\omega}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\omega}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})$
4. $\frac{d}{d\theta}\sin(\theta)\cos(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
   $\frac{d}{dt}\sin(\theta)\cos(\theta) = \omega\cos^2\theta - \omega\sin^2\theta = \omega(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

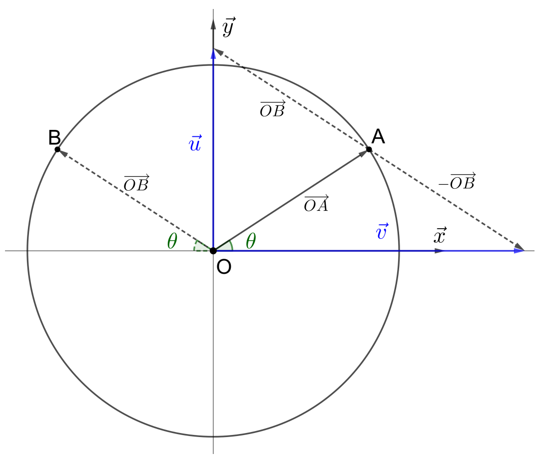
3 Dérivations (le retour !)

1. $\frac{d}{dt}\cos(\theta) = \frac{d\theta(t)}{dt}(-\sin(\theta(t)) = -\dot{\theta}\sin(\theta)$
2. $\frac{d}{dt}\sin(\theta) = \dot{\theta}\cos(\theta)$
3. $\frac{d}{dt}\tan(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)} = \dot{\theta}(1+\tan^2(\theta))$
4. $\frac{d}{dt}\ln(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\theta}$
5. $\frac{d}{dt}\sin(\theta)\cos(\theta) = \dot{\theta}\cos^2(\theta) - \dot{\theta}\sin^2(\theta) = \dot{\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$
6. $\frac{d}{dt}\theta^\alpha = \alpha\dot{\theta}\theta^{\alpha-1}$
7. $\frac{d}{dt}\theta\cos(\theta)\sin(\theta) = \dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) - \theta\dot{\theta}\sin^2(\theta) + \theta\dot{\theta}\cos^2(\theta)$

4 Vecteurs

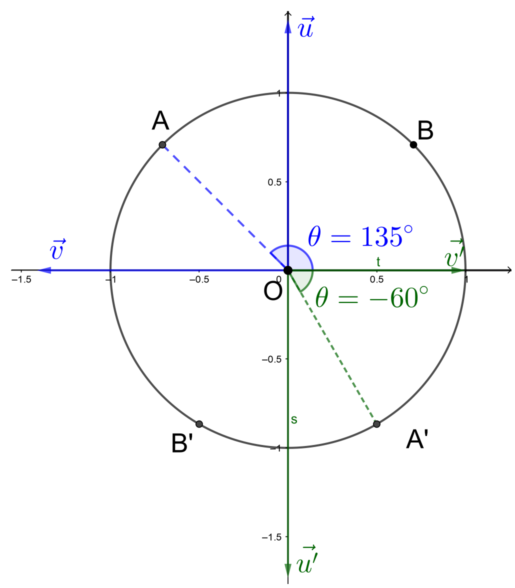
1. $\overrightarrow{OA} = R\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = R\begin{pmatrix}-\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$

2.

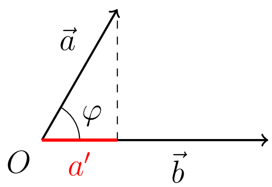


3. $\vec{u} = R\begin{pmatrix}0 \\ 2\sin\theta\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = R\begin{pmatrix}2\cos\theta \\ 0\end{pmatrix}$

4.

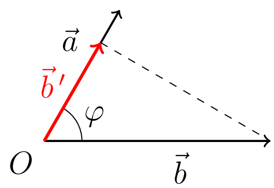


5 Produit scalaire

1. 

   Par trigonométrie, la longueur cherchée est

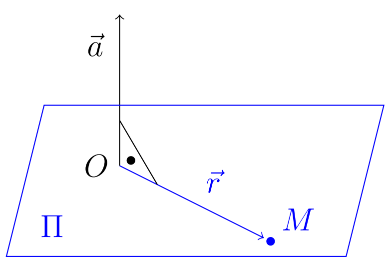
$$a' = ||\vec{a}||\,|\cos\varphi| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{||\vec{b}||}\,.$$

2. 

   Le vecteur cherché est la projection algébrique (avec signe) multipliant le vecteur unitaire parallèle et de même sens que $\vec{a}$

$$\vec{b}\,' = ||\vec{b}||\cos\varphi\,\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||^2}\,\vec{a}\,.$$

   Remarque : $\vec{b}\,'$ et $\vec{a}$ sont opposés si $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos\varphi < 0$.

3. 

   Condition d'orthogonalité : $\vec{r}\cdot\vec{a} = 0$.

6 Produit vectoriel

1. Par définition du produit vectoriel, l'aire est la norme $||\vec{a}\times\vec{b}||$.
2. L'aire d'un parallélogramme étant « base fois hauteur », $h = \frac{||\vec{a}\times\vec{b}||}{||\vec{b}||}$.

7 Unités et analyse dimensionnelle

1. La dimension de la constante de la gravitation universelle G et son unité dans le système SI sont respectivement,

$$G = \frac{L^3}{M\,T^2} \qquad \text{ainsi} \qquad G = \left[\frac{m^3}{kg\,s^2}\right] \tag{1}$$

2. Attention ! Il est important que <u>tous</u> les termes de l'expression donnent des mètres.
   (a) $\frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \Rightarrow \mathrm{s}^{-1} \neq \mathrm{m}$ non
   (b) $\frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}} \Rightarrow \mathrm{s} \neq \mathrm{m}$ non
   (c) $\frac{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-4}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \Rightarrow \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-3} \neq \mathrm{m}$ non
   (d) $\frac{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}} \Rightarrow \mathrm{m}$ oui !

   L'expression (d) est donc la seule qui soit compatible avec la contrainte dimensionnelle.