X. Dynamique du solide indéformable

Dr. Yves Revaz

2025

Plan du cours

I - Cinématique
II - Référentiel accélérés
III - Lois de Newton
IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
V - Forces ; application des lois de Newton
VI - Travail, Energie, principes de conservation
VII - Chocs, systèmes de masse variable
VIII - Oscillateur harmonique
IX - Moment cinétique ; Gravitation
X - Solide indéformable
XI - Application du solide indéformable

Table des matières

1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
2 - Centre de masse et lois de Newton
3 - Statique
4 - Energie (cinétique) de rotation
5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
6 - Moment cinétique d'un solide
7 - Solide qui roule
8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

X-1. Introduction. Du système de points au solide indéformable.

Un solide indéformable peut avoir un mouvement

– de translation

– de rotation

Il va falloir mettre de nouveaux concepts en place pour le mouvement de rotation !

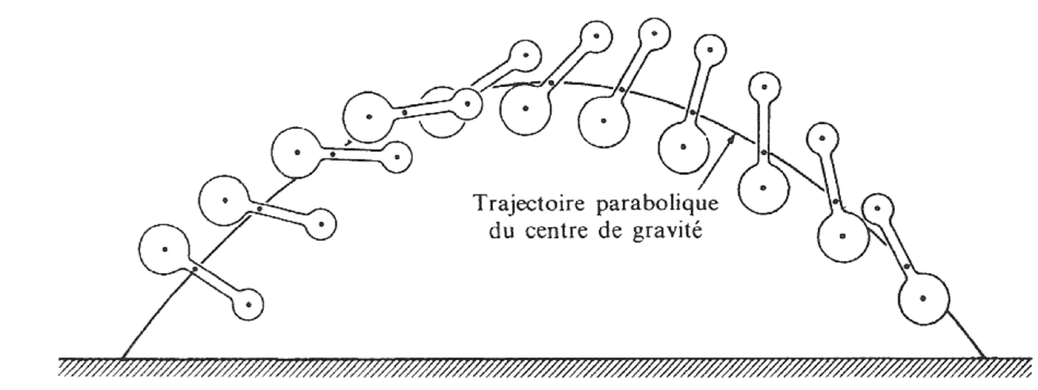
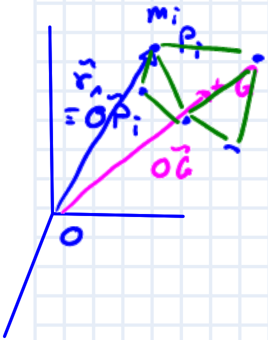


Table des matières

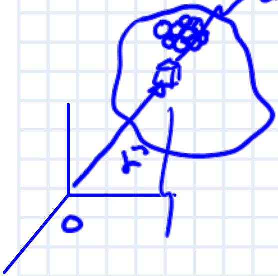
1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
2 - Centre de masse et lois de Newton
3 - Statique
4 - Energie (cinétique) de rotation
5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
6 - Moment cinétique d'un solide
7 - Solide qui roule
8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

2 - Centre de masse et lois de Newton : centre de masse



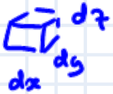
$$\vec{OG} := \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \qquad M = \sum_i m_i$$

$$\begin{cases} \vec{P}_{tot} = M \vec{v}_G \\ \sum \vec{F} = M \vec{a}_G \end{cases}$$



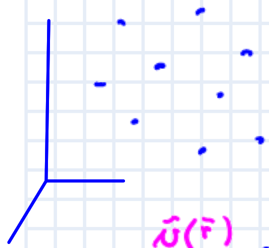
$$dm = \rho(\vec{r})\, dV = \rho(\vec{r})\, dx\, dy\, dz$$

$$\vec{OG} := \frac{\int_V dm \cdot \vec{r}}{\int_V dm} = \frac{\int_V \rho(\vec{r})\, \vec{r}\, dV}{\int_V \rho(\vec{r})\, dV} = \frac{1}{M} \iiint \rho(x,y,z)\, \vec{r}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

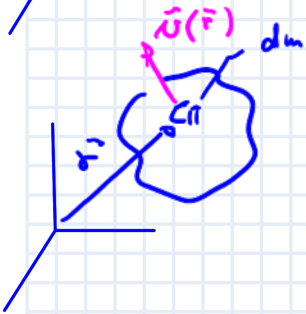


2 - Centre de masse et lois de Newton : moment cinétique

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \overbrace{m\vec{v}}^{\vec{p}}$$



$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O,i} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$



$$\vec{L}_O = \int (\vec{r} \times \vec{v})\, dm = \int (\vec{r} \times v)\, \rho(\vec{r})\, dV$$

$$\vec{L}_O = \iiint \left(\vec{r}(x,y,z) \times \vec{v}(x,y,z) \right) \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

2 - Centre de masse et lois de Newton : moment de force

$$\vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{ij}$$

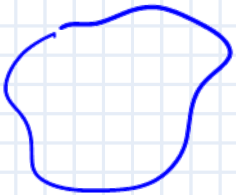
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \sum \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \underbrace{\sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i^{ext}}_{\vec{M}_O^{ext}} + \underbrace{\sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i^{int}}_{\vec{M}_O^{int} = 0}$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{M}_O^{ext}}$$

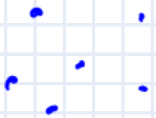
solide



$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{ext}$$

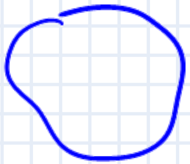
2 - Centre de masse et lois de Newton : moment de force et théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{M}_O$$



$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}}_{\vec{M}_O^{ext}} + \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int}}_{0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{M}_O^{ext}}$$



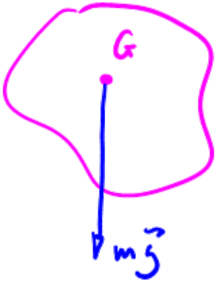
$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{M}_O^{ext}}$$

Quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \underline{M\vec{a}_G}$$

Moment cinétique et théorème du moment cinétique pour un solide

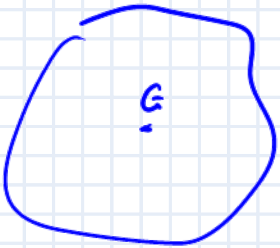


$$\vec{L}_O = \int_V \vec{r} \times dm\, \vec{v}(\vec{r})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

Important dans tous les cas : le poids s'applique au centre de masse.

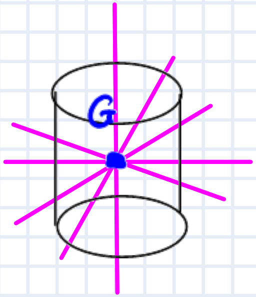
Détermination du centre de masse d'un solide

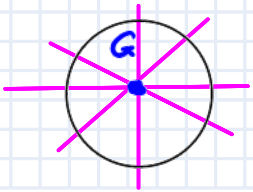


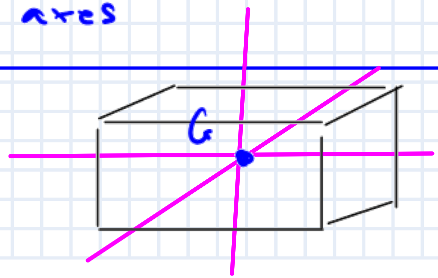
$$\vec{OG} := \frac{1}{M}\int \dots dm$$

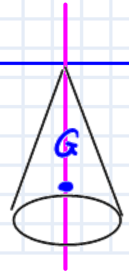
① Si un solide possède un axe de symétrie alors le cdm est sur cet axe.

② Si un solide possède plusieurs axe de symétrie, le cdm est à l'intersection de ces axes

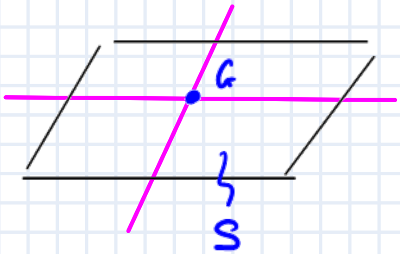








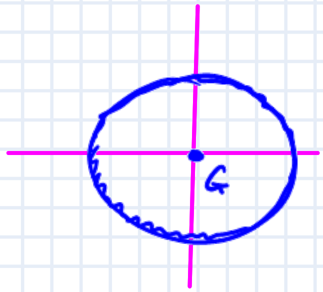
Objets en 2D



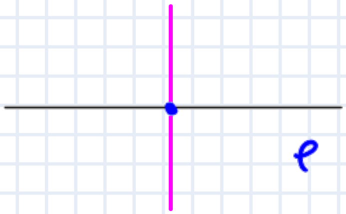
masse surfacique

ρ_s

$M = \rho_s S$



Objets en 1D

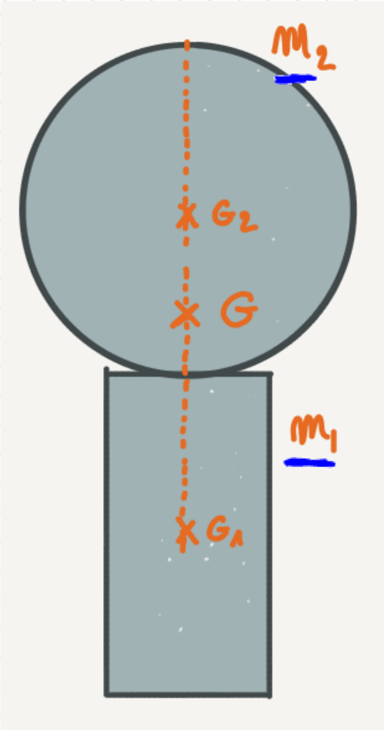


masse linéique

ρ_ℓ

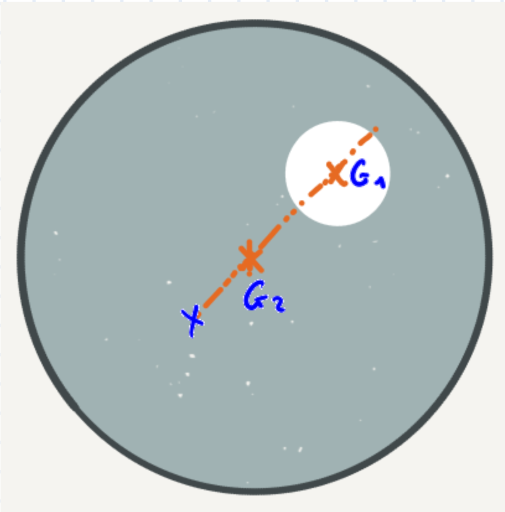
$M = \rho_s \cdot \ell$

Superposition de deux solides :



$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG_1} + m_2 \vec{OG_2}}{m_1 + m_2}$$

solide à trou



m_2 M m_1

$\vec{OG_2}$ $\vec{OG}$ $\vec{OG_1}$

$$\vec{OG_2} = \frac{\vec{OG}\cdot M + \vec{OG_1}\, m_1}{M + m} = \frac{\vec{OG}\, M + \vec{OG_1}\, m_1}{m_2}$$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{\vec{OG_2}\cdot m_2 - \vec{OG_1}\, m_1}{M}}$$

Chercher le c.d.m. entre le solide sans trou et un "trou" de masse négative égale à la masse enlevée au solide.

Table des matières

1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
2 - Centre de masse et lois de Newton
3 - Statique
4 - Energie (cinétique) de rotation
5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
6 - Moment cinétique d'un solide
7 - Solide qui roule
8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

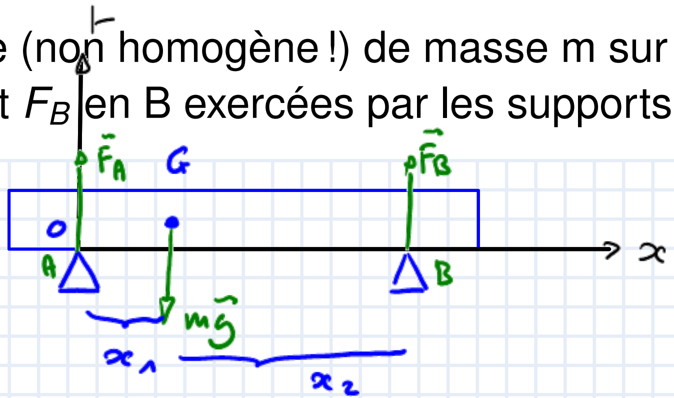
3 - Statique

Les conditions sont alors :

$$\vec{F}^{ext} = M\vec{a}_G = 0$$
$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d}{dt}\vec{L}_O = 0$$

$$\vec{F}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$$

Exemple : poutre (non homogène !) de masse m sur 2 supports. Déterminer les forces F_A en A et F_B en B exercées par les supports



$\vec{F}_A = ?$ $\quad \vec{F}_B = ?$

① 2ème Loi de Newton $\quad \vec{F}^{ext} = 0 \quad \vec{F}_A + \vec{F}_B + m\vec{g} = 0$

$$\boxed{F_A + F_B = mg}$$

② $\vec{M}_A^{ext} = 0$

$A \equiv O$

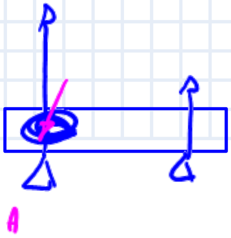
$$\vec{M}_O \equiv \vec{M}_A = \underbrace{\vec{OA}}_{=0} \times \vec{F}_A + \vec{OB} \times \vec{F}_B + \vec{OG} \times m\vec{g} = 0$$

$$= (x_1 + x_2)\,\vec{e}_x \times F_B\,\vec{e}_z + x_1\,\vec{e}_x \times (-mg)\,\vec{e}_z = 0$$

$$= (x_1 + x_2)\,F_B\,(-\cancel{\vec{e}_y}) + x_1\,mg\,\cancel{\vec{e}_y} = 0$$

$$(x_1 + x_2)\,F_B = x_1\,mg$$

$$F_B = \frac{x_1\,mg}{x_1 + x_2}$$



$$\boxed{F_A = mg\frac{x_2}{\cancel{x_1} + x_2}}$$

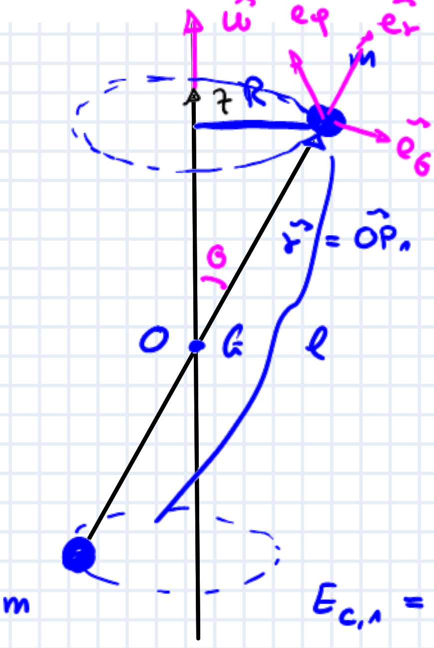
$$\boxed{F_B = mg\frac{x_1}{x_1 + x_2}}$$

Table des matières

1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
2 - Centre de masse et lois de Newton
3 - Statique
4 - Energie (cinétique) de rotation
5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
6 - Moment cinétique d'un solide
7 - Solide qui roule
8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

4 - Energie (cinétique) de rotation

$\hat{e}_\varphi \parallel \hat{v}$



$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ vecteur de rotation

$\vec{OP}_1 = r \vec{e}_r$ $\quad r = \frac{\ell}{2}$ $\quad R = \sin\theta \, r$

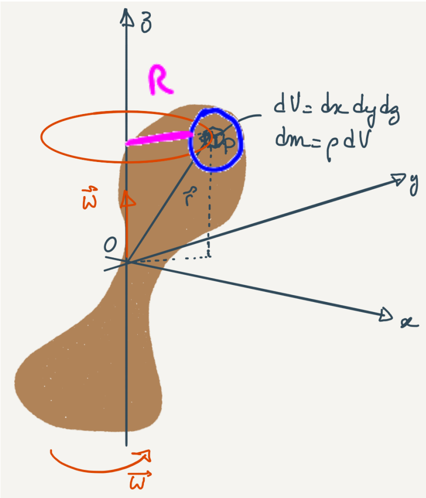
$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = \omega \vec{e}_z \times r \vec{e}_r$$
$$= \omega r (\hat{e}_z \times \hat{e}_r)$$
$$= \omega \, r \sin\theta \, \hat{e}_\varphi$$
$$= \omega R \hat{e}_\varphi$$

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 = \frac{1}{2} (m R^2) \omega^2$$

$$E_{c,2} = \frac{1}{2} (m R^2) \omega^2$$

$$\boxed{E_{c,rot.} = \frac{1}{2} (2 m R^2) \omega^2}$$

$$\boxed{E_m = E_p + \frac{1}{2} (2m) v_G^2 + \frac{1}{2} (2 m R^2) \omega^2}$$



$$dE_{c,rot} = \frac{1}{2} dm\, v^2 \qquad\qquad dm = \rho\, dV$$

$$= \frac{1}{2} dm\, (R\omega)^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho\, (R\omega)^2\, dV$$

$$E_{c,rot} = \int_{Vol} dE_{c,rot}(\vec{r})$$

$$= \int_{Vol} \frac{1}{2} \rho(\vec{r})\, R^2(\vec{r})\, \omega^2\, dV$$

$$E_{c,rot} = \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2}\ \underbrace{\int_{Vol} \rho(\vec{r})\, R^2(\vec{r})\, dV}_{I_z}$$

$$\boxed{E_{c,rot} = \frac{1}{2}\omega^2 I_z}$$

$$\boxed{I_z = \int_{Vol} \rho(\vec{r})\, R^2(\vec{r})\, dV}$$

moment d'inertie du solide par rapport à l'axe z

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}^{ext} = M \vec{a}_G \\ \vec{M}_O^{ext} = \frac{d}{dt} \vec{L}_O \end{array} \right.$$

En résumé :

$$E_{C,\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\mathrm{vol}} R^2 \rho(r) d\vec{r} = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$$

Avec I_z moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz)

$$I_z = \int_{\mathrm{vol}} R^2 \rho(r) d\vec{r}$$

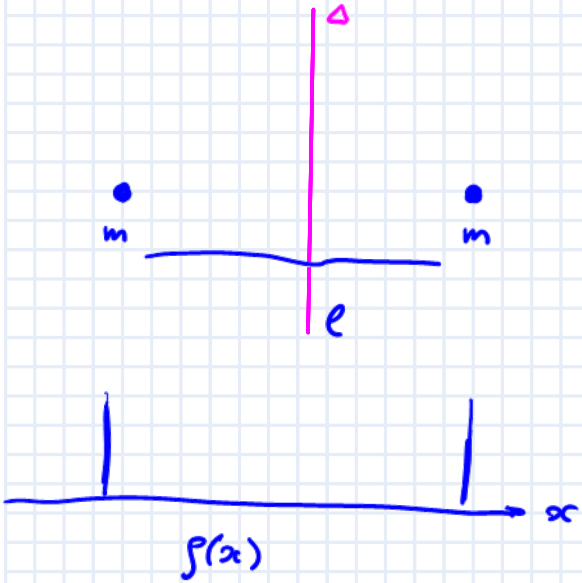
$$E_{c,r} = \frac{1}{2} \omega^2 I_z$$

$$\omega^2 \quad I_z$$

Table des matières

1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
2 - Centre de masse et lois de Newton
3 - Statique
4 - Energie (cinétique) de rotation
5 - Moment d’inertie d’un solide par rapport à un axe
6 - Moment cinétique d’un solide
7 - Solide qui roule
8 - Tenseur d’inertie (hors programme)

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe : cas de 2 masses

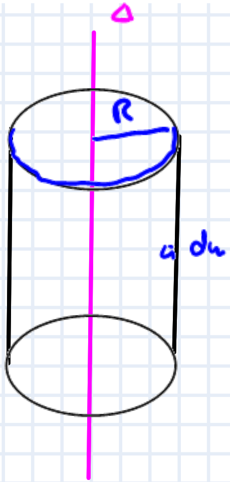


$$I_z = \int \rho(\vec{r})\, R^2(\vec{r})\, dV$$

$$I_\Delta = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\underline{I_\Delta} = 2m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{2} m\ell^2$$

Moment d’inertie d’un solide par rapport à un axe : cas d’un cylindre infiniment mince

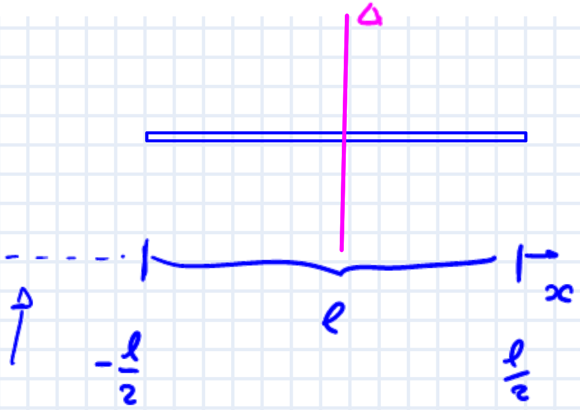


$$I_\Delta = \sum dm\, R^2$$

$$\sum dm = M$$

$$I_\Delta = \underline{M R^2}$$

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe : cas d'une tige infiniment mince



$\rho_\ell \qquad M = \rho_\ell \cdot \ell$

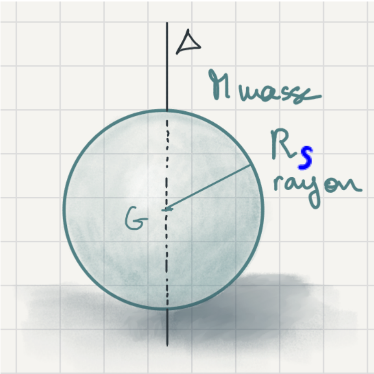
$$I_\Delta = \int \rho\, R^2\, dV = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\ell/2} \rho_\ell\, x^2\, dx$$

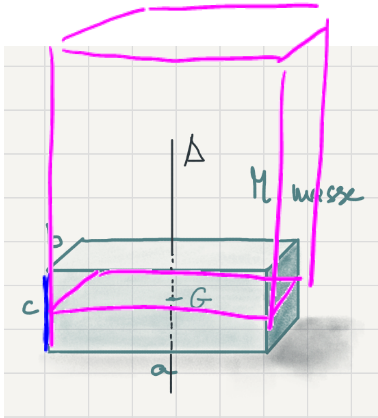
$$I_\Delta = \rho_\ell \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\ell/2} = \rho_\ell \left[\frac{1}{3}\frac{\ell^3}{8} + \frac{1}{3}\frac{\ell^3}{8}\right]$$

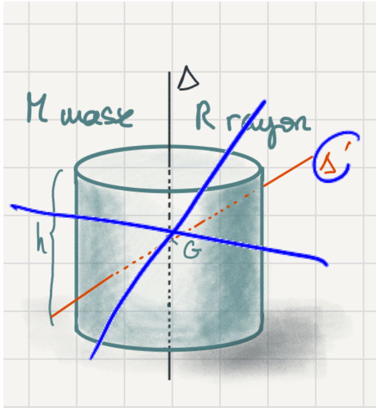
$$= M\left(\frac{1}{24}\ell^2 + \frac{1}{24}\ell^2\right)$$

$$\boxed{I_\Delta = \frac{1}{12} M \ell^2}$$

Moment d'inertie de solides usuels







$$I_\Delta = \frac{2}{5} M R_S^2$$

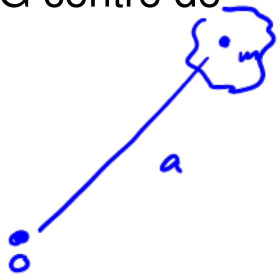
$$I_\Delta = \frac{1}{12} M \left(a^2+b^2\right)$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_{\Delta'} = \frac{1}{4} M \left[R^2 + \frac{h^2}{2}\right]$$

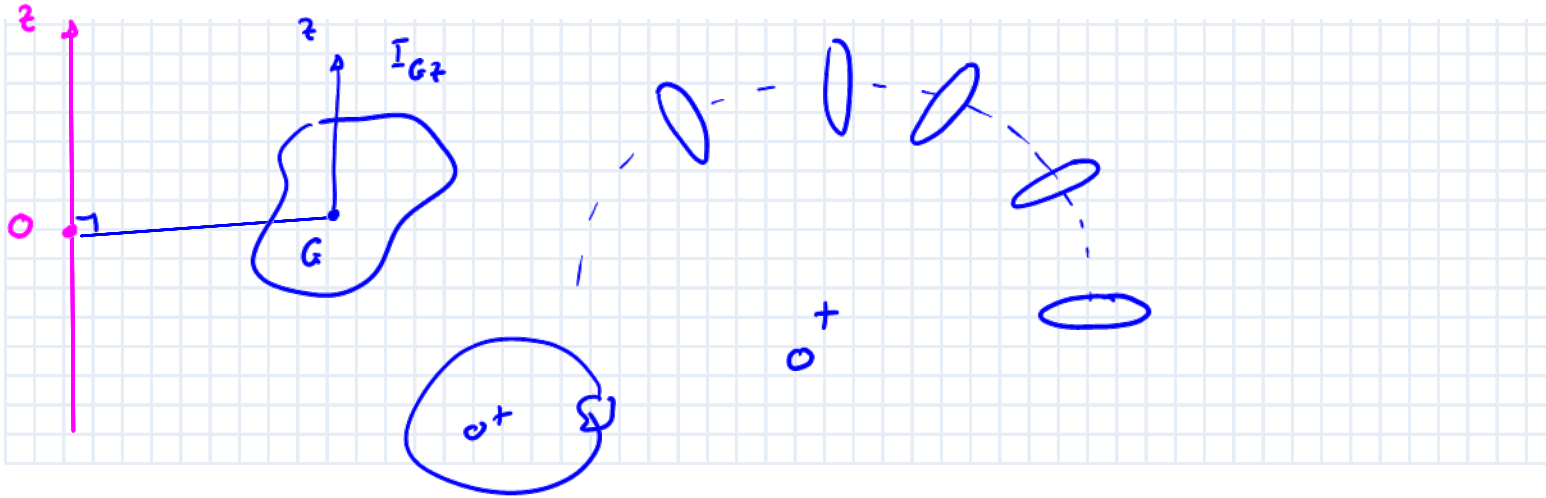
Théorème de Steiner :

Si on a deux axes *parallèles* (Oz) et (Gz) distants de a, avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d’inertie par rapport à (Gz) alors

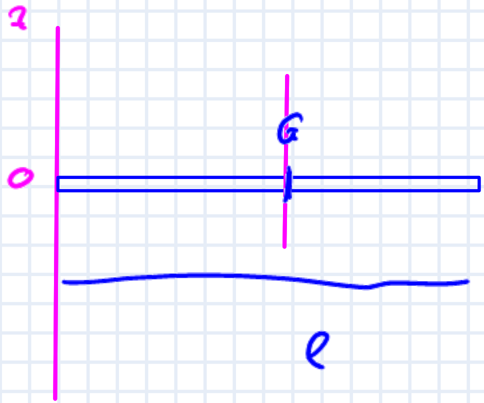


$$\boxed{I_{Oz} = I_{Gz} + ma^2}$$

I_{Oz} moment d’inertie par rapport à (Oz)



Théorème de Steiner :
exemple d'une tige infiniment mince



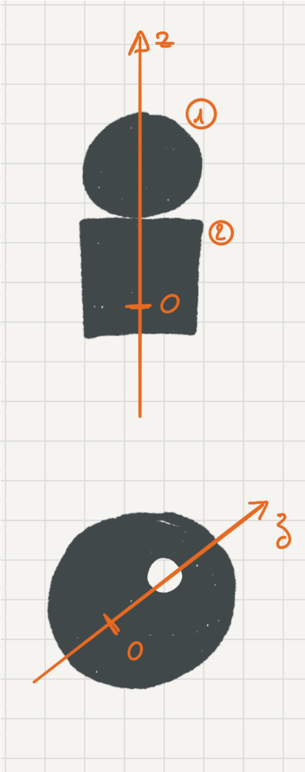
$$I_{Oz} = I_{Gz} + m a^2$$

$$= \frac{1}{12} m \ell^2 + m \frac{\ell^2}{4}$$

$$= \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{3}{12} m \ell^2$$

$$\boxed{I_{Oz} = \frac{1}{3} m \ell^2}$$

Solides composés et solides à trous



$$I_{Oz} = I^{(1)}_{Oz} + I^{(2)}_{Oz}$$

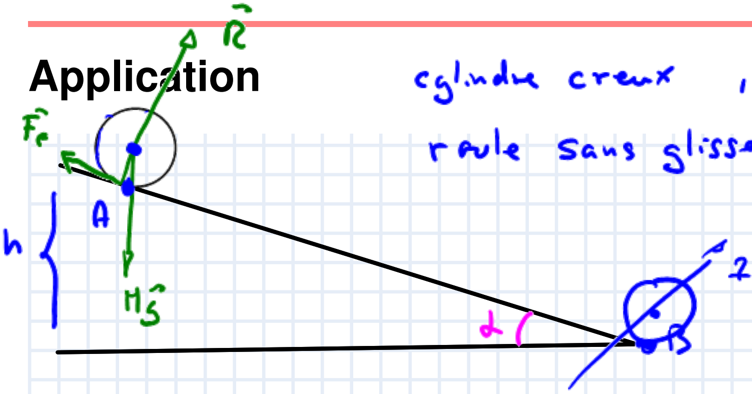
$$I^{2}_{Oz} = I_{Oz} + I^{(1)}_{Oz}$$

$$I_{Oz} = I^{(2)}_{Oz} - I^{(1)}_{Oz}$$

Application

cylindre creux, masse M, rayon R

roule sans glisser



$\vec{v}_{G,B} = ?$ $\qquad \vec{v}_A = 0$

$$\begin{cases} W_{M\vec{g}} \neq 0 & \text{conservative} \\ W_{\vec{R}} = 0 \\ W_{\vec{F_f}} = 0 \end{cases}$$

$$E_{m,A} = E_{m,B}$$

$$E_p^A + \underbrace{E_{c,t}^A + E_{c,r}^A}_{0} = E_p^B + E_{c,t}^B + E_{c,r}^B$$

$$\boxed{Mgh = 0 + \frac{1}{2} M \vec{v}_{G,B}^{\,2} + \frac{1}{2}\omega^2 I_z}$$

Application

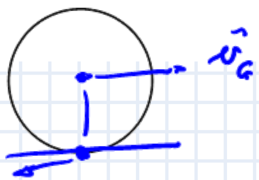
$$\cancel{M} g h = \frac{1}{2} M v_{G,B}^2 + \frac{1}{2} \cancel{I_{G}} \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{M} v_{G,B}^2 + \frac{1}{2} \cancel{M} \cancel{R^2} \frac{v_{G,B}^2}{\cancel{R^2}}$$

$$g h = v_{G,B}^2$$

$$\boxed{v_{G,B} = \sqrt{g h}}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2 g h}}$$



$$v = R \omega$$

cyl. homogène

$$I_{G} = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\cancel{M} g h = \frac{1}{2} \cancel{M} v^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cancel{M} \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}}$$

$$\boxed{v_{G,B} = \sqrt{\frac{4}{3} g h}}$$

Table des matières

1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
2 - Centre de masse et lois de Newton
3 - Statique
4 - Energie (cinétique) de rotation
5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
6 - Moment cinétique d'un solide
7 - Solide qui roule
8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

6 - Moment cinétique d'un solide.

Rappel : quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

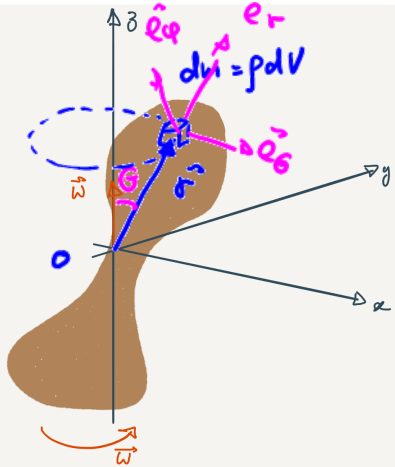
Moment cinétique et théorème du moment cinétique pour un solide

$$\vec{L}_O = \int_V \vec{r} \times dm\, \vec{v}(\vec{r})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

Soit un solide en rotation autour d'un axe passant par G. On place l'axe (Gz) de manière que ce soit l'axe de rotation. Le vecteur rotation est alors $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm\,\vec{v} \qquad \vec{e}_\varphi \parallel \vec{v}$$



$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\varphi = r\sin\theta\,\omega\,\vec{e}_\varphi$$

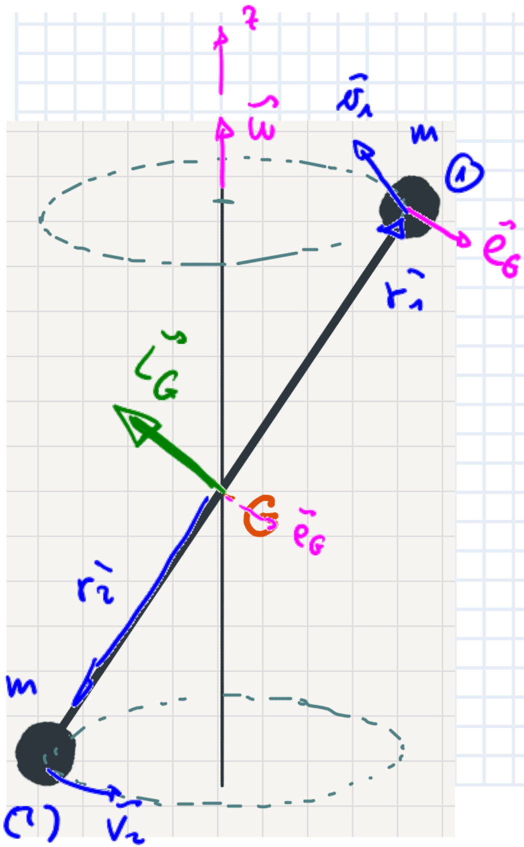
$$d\vec{L} = dm\left(r\,\vec{e}_r \times r\sin\theta\,\omega\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= dm\,r^2\sin\theta\,\omega\,(-\vec{e}_\theta)$$

$$\boxed{\vec{L} = -\int dm\,r^2\sin\theta\,\omega\,\vec{e}_\theta}$$

$$r = r(x,y,z)$$
$$\theta = \theta(x,y,z)$$
$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(x,y,z)$$

Cas simple : "haltère" en rotation, dont la tige a une masse négligeable.



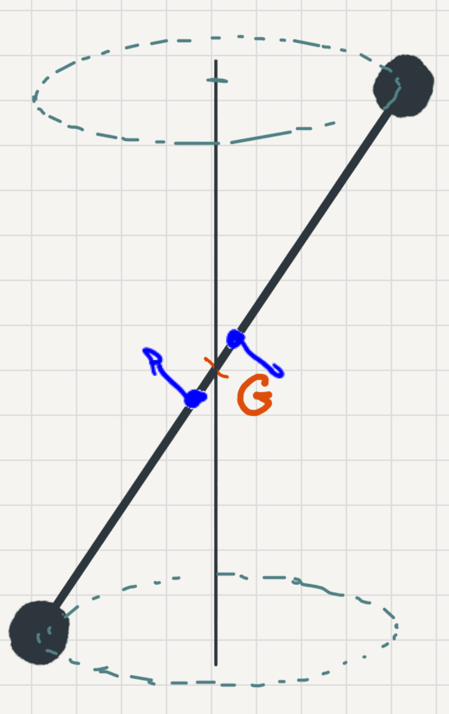
$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^{(1)} + \vec{L}_G^{(2)}$$

$$\vec{L}_G^{(1)} = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1$$
$$= -m r^2 \sin\theta\, \omega\, \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_G^{(2)} = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 \qquad \begin{cases} \vec{r}_2 = -\vec{r}_1 \\ \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \end{cases}$$
$$= -\vec{r}_1 \times m(-\vec{v}_1)$$
$$= \vec{L}_G^{(1)} = -m r^2 \sin\theta\, \omega\, \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_G = -2 m r^2 \sin\theta\, \omega\, \vec{e}_\theta \qquad M = 2m$$
$$= -M r^2 \sin\theta\, \omega\, \vec{e}_\theta$$

$\vec{L}_O = \vec{L}_O(t) \neq \text{cte}$



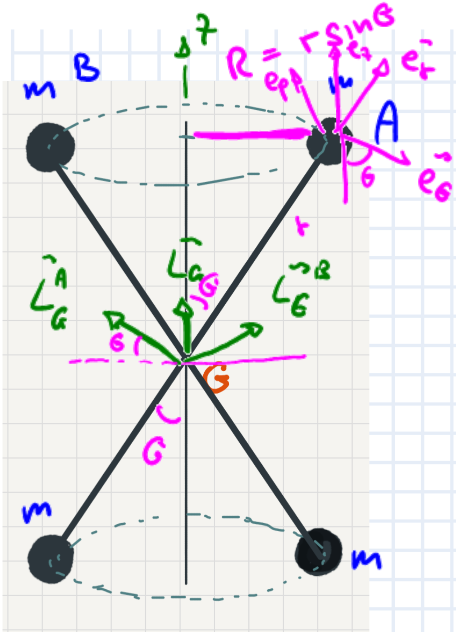
Th. du moment cinétique

$$\boxed{\vec{M}_O^{ext} = \frac{d}{dt}\vec{L}_O} \neq 0$$

$\Downarrow$ $\vec{M}_O^{ext} \neq 0$

En général, le moment cinétique n'est pas parallèle à l'axe de rotation. Sauf si il y a une certaine symétrie dans la répartition de la masse :

z, $I = mR^2$, R



$$\vec L_G = \vec L_G^A + \vec L_G^B$$

$$\vec L_G = 2\left(\vec L_G^A \cdot \vec e_z\right)$$

$$= -2\left(2mr^2\sin\theta\,\omega\right)\vec e_\theta \cdot \vec e_z$$

$$= -4mr^2\sin\theta\,\omega\,\underbrace{\left(\vec e_\theta \cdot \vec e_z\right)}_{-\sin\theta}$$

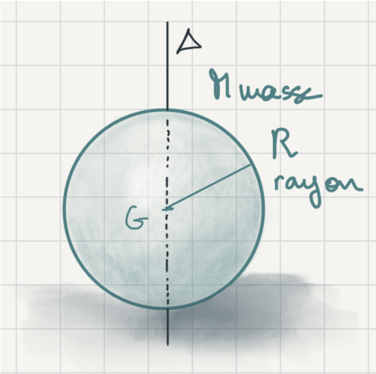
$$= 4mr^2\sin^2\theta\,\omega\,\vec e_z$$

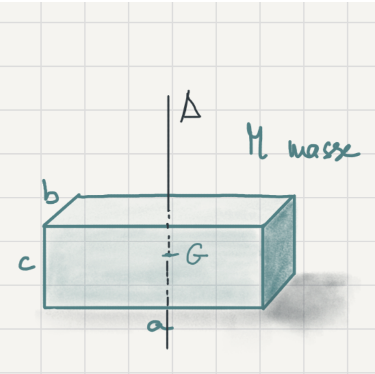
$$= MR^2\,\omega\,\vec e_z$$

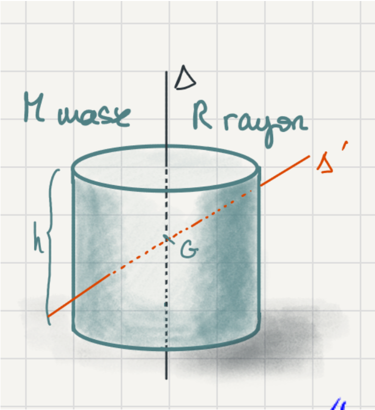
$$\boxed{\vec L_G = I_{Oz}\,\omega\,\vec e_z}$$

Dans certains cas $\vec{L}_G / / \vec{\omega}$. Alors : $\vec{L}_G = I_{Gz}\vec{\omega}$

Exemples de cas symétriques (solides usuels) :

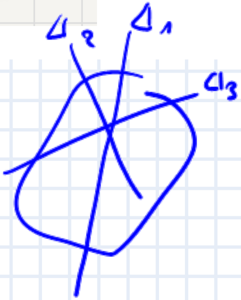






$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}$$

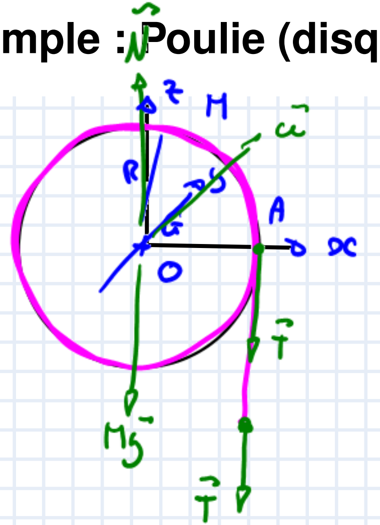
$$\boxed{\vec{L}_G = I_\Delta \vec{\omega}}$$



axes principaux d'inertie

Tous solide possède au moins 3 axes principaux d'inertie

Exemple : Poulie (disque plein homogène) fixée à un axe



masse M rayon R

Après un temps t, quelle sera la longueur de la corde déroulée

t=0 pas de mouvement

Forces : $M\vec{g}$, $\vec{T}$, $\vec{N}$

2ème loi de Newton : $M\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = M\vec{a}_G = 0$

$N = Mg + T$

Th du moment cinétique

$$\boxed{\sum M_x^{ext} = \frac{d}{dt} \vec{L}_x}$$

"x" = G

Moment de force par rap. à G

$$\vec{M}_G = \underbrace{\vec{GG} \times M\vec{g}}_{=0} + \underbrace{\vec{GG} \times \vec{N}}_{=0} + \vec{GA} \times \vec{T} = R\vec{e_x} \times (-T\vec{e_z})$$
$$= RT\vec{e_y}$$

Moment cinétique par rapp. à G

$$\vec{L} = I_{Gy}\,\vec{\omega} = \frac{1}{2}MR^2\omega\vec{e_y}$$

$$\dot{\omega} \sim \frac{1}{I_\Delta}\cdot T$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2}MR^2\underline{\dot{\omega}}\,\vec{e_y}$$

$$\frac{T}{R} = I_\Delta\,\dot{\omega}$$

Th. du moment cinétique

$$\vec{M}_G = \frac{d}{dt}\vec{L}_G$$

$$\underline{\cancel{R}T\cancel{\vec{e_y}} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\dot{\omega}\,\cancel{\vec{e_y}}}$$

$$\dot{\omega} = \frac{2T}{MR} \qquad \omega(t) = \frac{2T}{MR}\cdot t$$

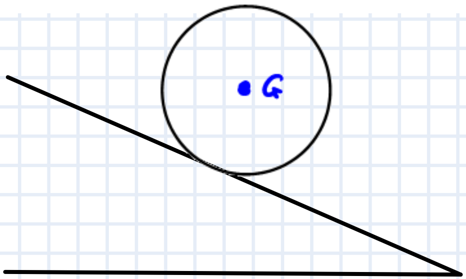
$$\theta(t) = \frac{1}{2}\frac{2T}{MR}t^2 = \frac{T}{MR}t^2 \qquad L = \theta(t)\cdot R \qquad \boxed{L = \frac{T}{M}t^2}$$

Table des matières

1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
2 - Centre de masse et lois de Newton
3 - Statique
4 - Energie (cinétique) de rotation
5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
6 - Moment cinétique d'un solide
7 - Solide qui roule
8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

7 - Solide qui roule

Problématique



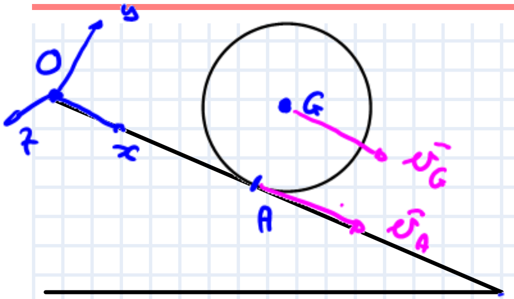
$$\boxed{\vec{M}_x^{ext} = \frac{d}{dt}\vec{L}_x}$$

"x" point à vitesse nulle

$$\boxed{\vec{L}_x = I_\Delta \, \vec{\omega}}$$

Δ est un axe principal d'inertie

"x" $\equiv$ G



① $\boxed{\vec{M}_x^{ext} = \frac{d}{dt}\vec{L}_x}$ "x" ?

② $\boxed{\vec{L}_x = I_\Delta \vec{\omega}}$

~~O : origine du repère~~

~~pt. à vitesse nulle~~

~~① ②~~ $\cancel{\vec{L}_O = I_{Oz}\vec{\omega}}$

G : c.d.m

point à vitesse non nulle

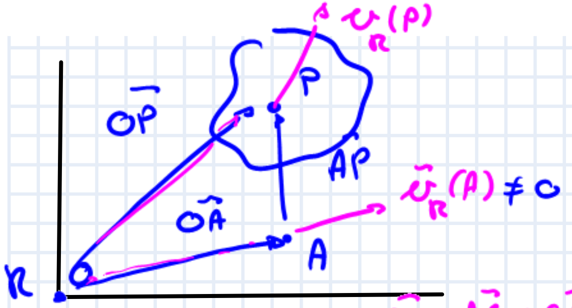
① ②

A : pt. de contact

point à vitesse non nulle

① ②

Parfois, on souhaite utiliser un point *non fixe* pour étudier le mouvement.



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_A^{ext} \quad ?$$

$$\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP}$$

$$\vec{L}_A := \int_V \vec{AP} \times dm\, \vec{v}_R(P) = \int_V \vec{AO} \times dm\, \vec{v}_R(P) + \underbrace{\int_V \vec{OP} \times dm\, \vec{v}_R(P)}_{\vec{L}_O}$$

$$\vec{L}_A = \vec{AO} \times \underbrace{\int_V dm\, \vec{v}_R(P)}_{\vec{P}^{tot}} + \vec{L}_O$$

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{AO} \times \vec{P}^{tot} + \vec{L}_O}$$

$-\vec{OA}$

$$\vec{L}_A = -\vec{OA} \times \vec{p}^{tot} + \vec{L}_O$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_A = -\frac{d}{dt}\vec{OA} \times \vec{p}^{tot} - \vec{OA} \times \frac{d}{dt}\vec{p}^{tot} + \frac{d}{dt}\vec{L}_O$$

$$= -\vec{v}_R(A) \times \vec{p}^{tot} - \vec{OA} \times \sum \vec{F}^{ext} + \sum \vec{M}_O^{ext}$$

$$= -\vec{v}_R(A) \times M\vec{v}_R(G) + \vec{AO} \times \sum \vec{F}^{ext} + \sum \vec{OP} \times \vec{F}^{ext}$$

$$= -\vec{v}_R(A) \times M\vec{v}_R(G) + \underbrace{\sum \vec{AO} \times \vec{F}^{ext} + \sum \vec{OP} \times \vec{F}^{ext}}$$

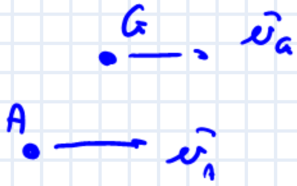
$$= -\vec{v}_R(A) \times M\vec{v}_R(G) + \sum \vec{AP} \times \vec{F}^{ext}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_A = -\vec{v}_R(A) \times M\vec{v}_R(G) + \sum \vec{M}_A^{ext}}$$

$$\vec{p}^{tot} = M\vec{v}(G)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_A = \underbrace{-\vec{v}_R(A) \times M\,\vec{v}_R(G)}_{=0} + \sum \vec{M}_A^{ext}}$$

$$\vec{v}_R(A) \times \vec{v}_R(G) = 0$$



- $\vec{v}_R(A) \,//\, \vec{v}_R(G)$
- $\vec{v}_R(A) = 0$

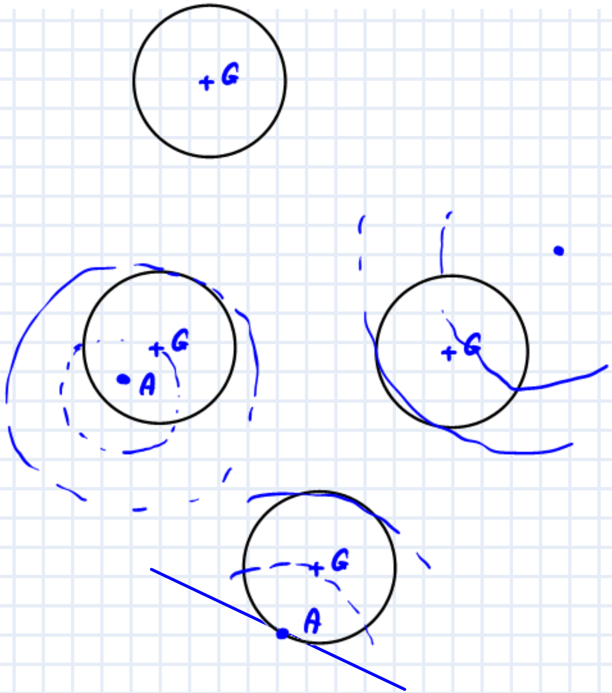
Peut-on utiliser : $\vec{L}_X = I_\Delta \vec{\omega}$?

1. "X" = G

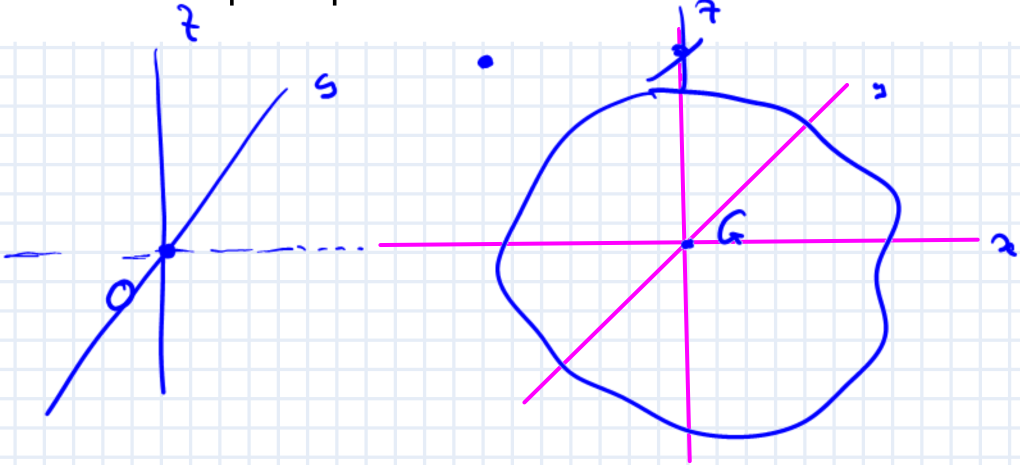
   I_G axe principal d'inertie

2. "X" = point à vitesse nulle du solide (le solide tourne autour de A)

   I_A axe principal d'inertie



(O, x, y, z) peuvent-ils être axes principaux d'inertie ?



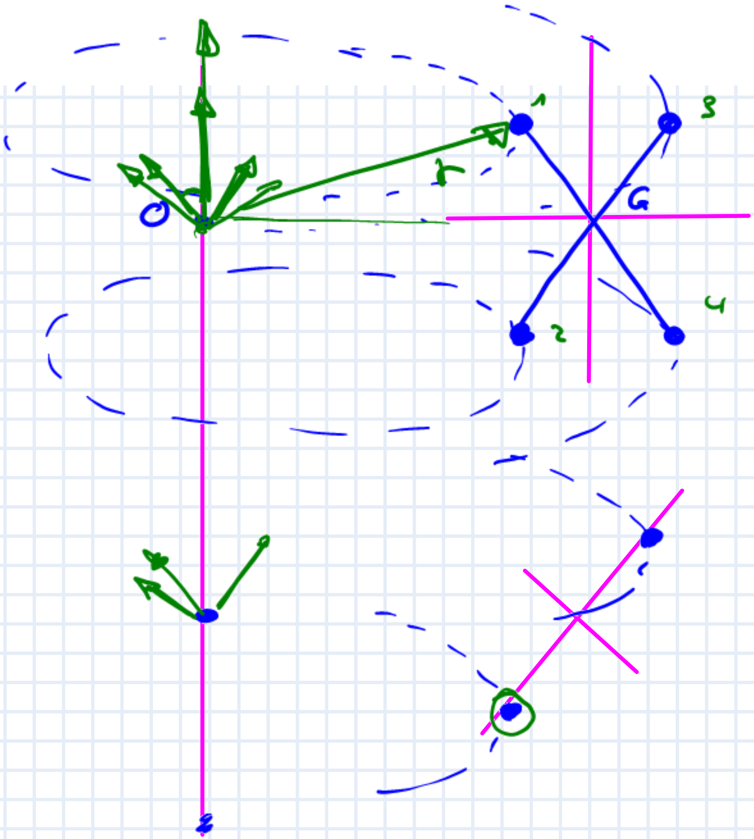
Oui, si (G, x, y, z) sont axes principaux d'inertie et si O appartient à un axe principal d'inertie.

Dans ce cas, pour une rotation autour de (Oz) :

$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ et $\vec{L}_O = I_{Oz} \vec{\omega}$.

Explication intuitive :

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m \vec{v}_i$$



En résumé :

Pour pouvoir utiliser

$$\vec{M}_A^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t}$$

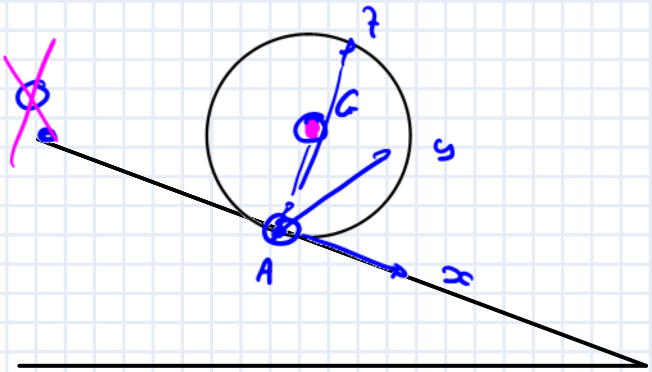
Il faut que A

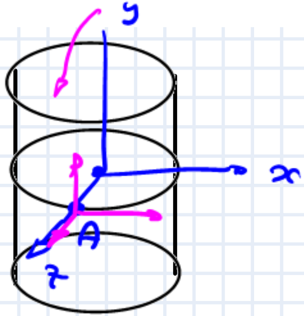
- soit fixe dans le référentiel
- OU confondu avec le c.d.m.
- OU se déplace à une vitesse colinéaire à celle du c.d.m.

Pour pouvoir calculer $\vec{L}_A$ avec $\vec{L}_A = I_{Az}\vec{\omega}$, il faut que (Az)

- soit un axe principal d'inertie
- ET que $A = G$ OU A est un point du solide à vitesse nulle.

Retour sur notre cylindre en rotation





Comparaison translation / rotation

$\vec{r}_G \quad \vec{v}_G \quad \vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G$

m

$\vec{F}$

$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$

$\vec{p} = m\vec{v}_G$

$\frac{1}{2} m v_G^2$

$\theta \quad \omega \quad \alpha = \dot{\omega}$

$\vec{\omega} \quad \vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$

I_Δ

$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F}$

$\sum \vec{M}_O = \frac{d}{dt}\vec{L}$

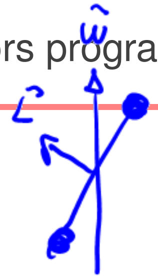
$(\vec{L}_O = I_\Delta \vec{\omega})$

$\frac{1}{2} I_\Delta \vec{\omega}^2$

Table des matières

1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
2 - Centre de masse et lois de Newton
3 - Statique
4 - Energie (cinétique) de rotation
5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
6 - Moment cinétique d'un solide
7 - Solide qui roule
8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

$$\boxed{\vec{L}_o = I_G \vec{\omega}}$$



8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

Cas ou l'axe de rotation passe par G, centre de masse :

En fait, de manière générale :

$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega}$$

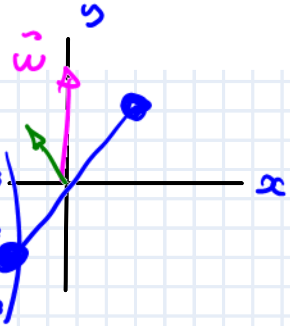
avec :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

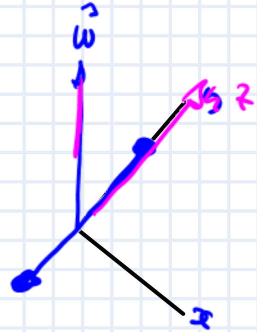
$\underline{I}$ est le tenseur d'inertie, il dépend de l'origine et des axes choisis.

Tenseur d'inertie : choix des axes

$$\vec{L} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{I}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}}_{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} I_{13}\,\omega \\ I_{23}\,\omega \\ I_{33}\,\omega \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{I_{11}\,\omega_x} \\ \cancel{I_{22}\,\omega_y} \\ I_{33}\,\omega_z \end{pmatrix}$$



$$\vec{L} = I_{33} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = I_{33}\,\vec{\omega}$$

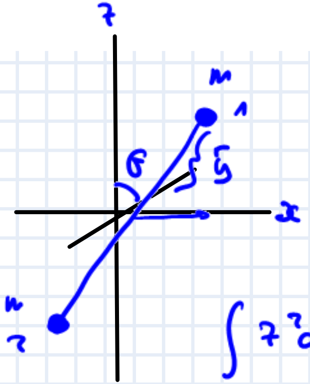
8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

$\underline{I}$ peut aussi s'écrire comme :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int(x^2+y^2+z^2)dm & 0 & 0 \\ 0 & \int(x^2+y^2+z^2)dm & 0 \\ 0 & 0 & \int(x^2+y^2+z^2)dm \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \int x^2 dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int y^2 dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int z^2 dm \end{bmatrix}$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int(\cancel{y^2} + z^2)dm & -\cancel{\int xydm} & -\int xzdm \\ -\cancel{\int xydm} & \int(x^2+z^2)dm & -\cancel{\int yzdm} \\ -\int xzdm & -\cancel{\int yzdm} & \int(x^2+\cancel{y^2})dm \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta \\ y_1 = 0 \\ z_1 = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -r\sin\theta \\ y_2 = 0 \\ z_2 = -r\cos\theta \end{cases}$$

$$\int z^2 dm = m r^2 \cos^2\theta + m r^2 \cos^2\theta = 2 m r^2 \cos^2\theta$$

$$\int x^2 + z^2 dm = 2(r^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)m = 2 r^2 m \, (\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1})$$

$$
\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}
$$

$$
\vec{L} = \begin{pmatrix} 2mr^2\cos^2\theta & 0 & -2mr^2\cos\theta\sin\theta \\ 0 & 2mr^2 & 0 \\ -2mr^2\cos\theta\sin\theta & 0 & 2mr^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} =
$$

$$
\vec{L} = \underline{2mr^2\sin\theta} \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}
$$