X. Dynamique du solide indéformable

Dr. Yves Revaz

2025

Plan du cours

Table des matières

X-1. Introduction. Du système de points au solide indéformable.

Un solide indéformable peut avoir un mouvement

– de translation

– de rotation

Il va falloir mettre de nouveaux concepts en place pour le mouvement de rotation !

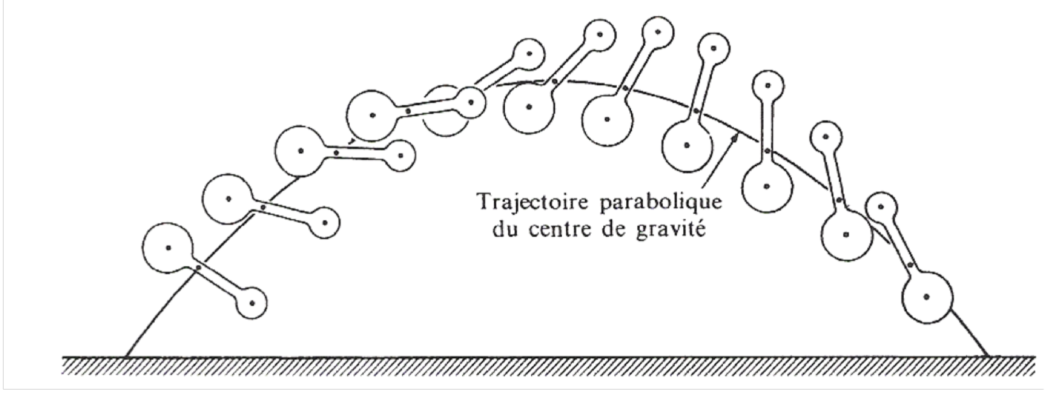


Table des matières

2 - Centre de masse et lois de Newton : centre de masse

2 - Centre de masse et lois de Newton : moment cinétique

2 - Centre de masse et lois de Newton : moment de force

2 - Centre de masse et lois de Newton :
moment de force et théorème du moment cinétique

Quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

Moment cinétique et théorème du moment cinétique pour un solide

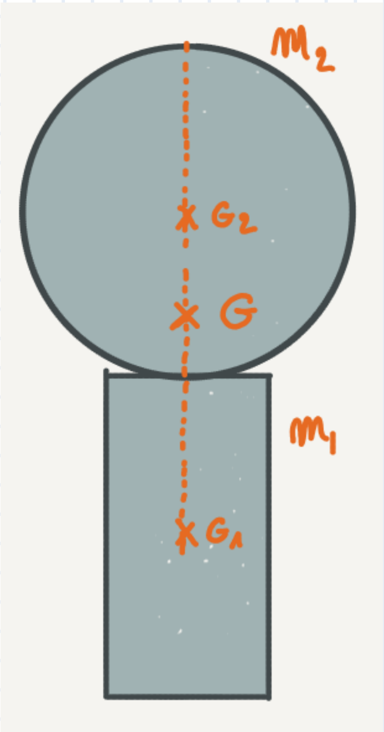
$$\vec{L}_O = \int_V \vec{r} \times dm\,\vec{v}(\vec{r})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

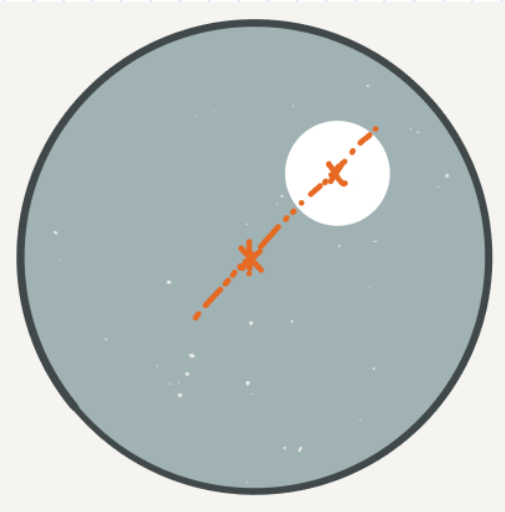
Important dans tous les cas : le poids s'applique au centre de masse.

Détermination du centre de masse d'un solide

Superposition de deux solides :



solide à trou



Chercher le c.d.m. entre le solide sans trou et un "trou" de masse négative égale à la masse enlevée au solide.

Table des matières

3 - Statique

Les conditions sont alors :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{0}$$

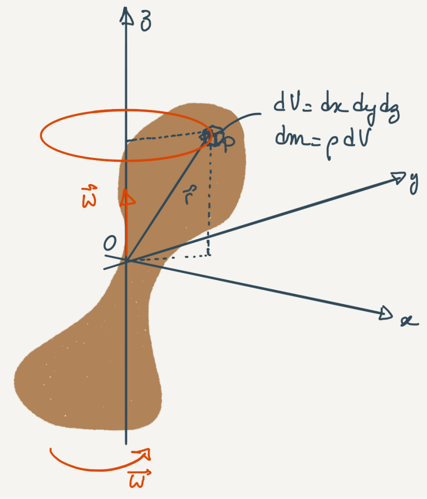
Exemple : poutre (non homogène !) de masse m sur 2 supports. Déterminer les forces F_A en A et F_B en B exercées par les supports

$$F_A = mg\frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

$$F_B = mg\frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

Table des matières

4 - Energie (cinétique) de rotation


z
dV = dx dy dz
dm = ρ dV
p
y
r
ω
O
x
ω

En résumé :

$$E_{C,\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\text{vol}} R^2 \rho(r) d\vec{r} = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$$

Avec I_z moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz)

$$I_z = \int_{\text{vol}} R^2 \rho(r) d\vec{r}$$

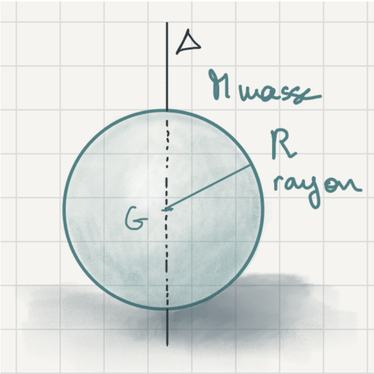
Table des matières

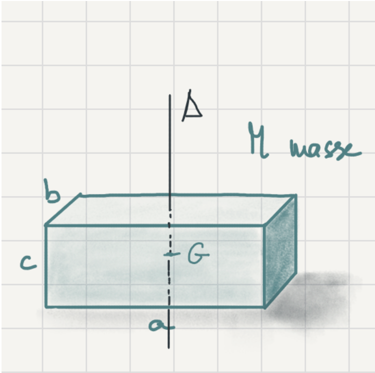
Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe : cas de 2 masses

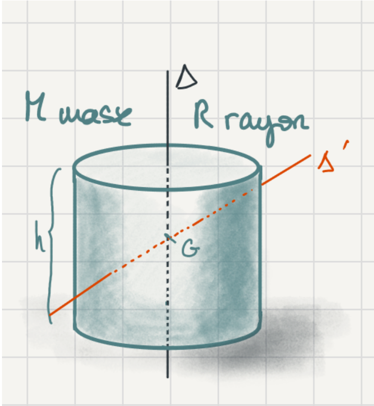
Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe : cas d'un cylindre infiniment mince

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe : cas d'une tige infiniment mince

Moment d’inertie de solides usuels







Théorème de Steiner :

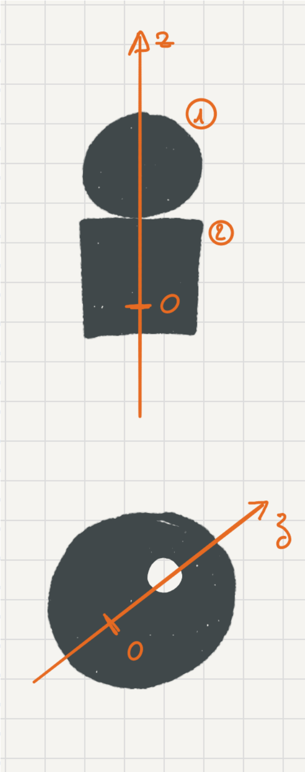
Si on a deux axes *parallèles* (Oz) et (Gz) distants de a, avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d'inertie par rapport à (Gz) alors

$$I_{Oz} = I_{Gz} + ma^2$$

I_{Oz} moment d'inertie par rapport à (Oz)

Théorème de Steiner :
exemple d'une tige infiniment mince

Solides composés et solides à trous



Application

Application

Table des matières

6 - Moment cinétique d'un solide.

Rappel : quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

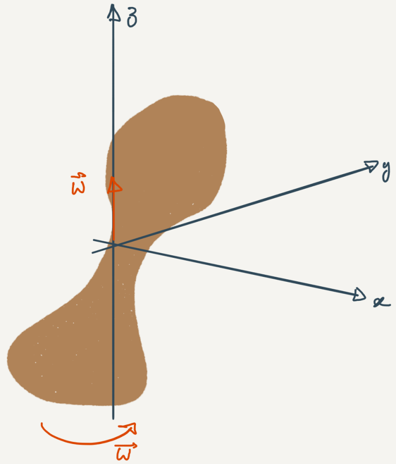
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

Moment cinétique et théorème du moment cinétique pour un solide

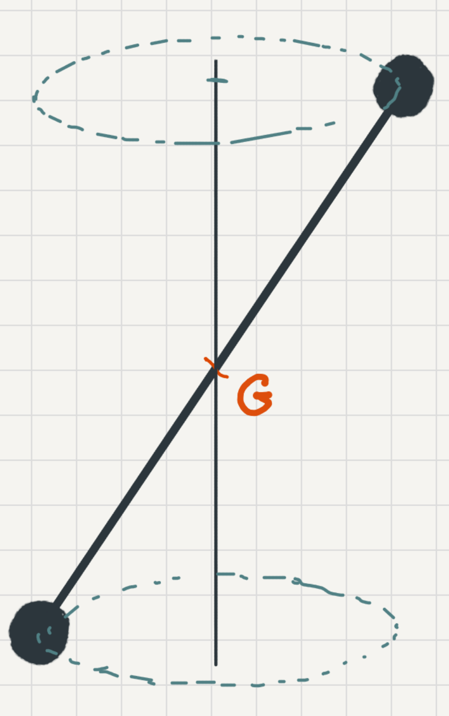
$$\vec{L}_O = \int_V \vec{r} \times dm\, \vec{v}(\vec{r})$$

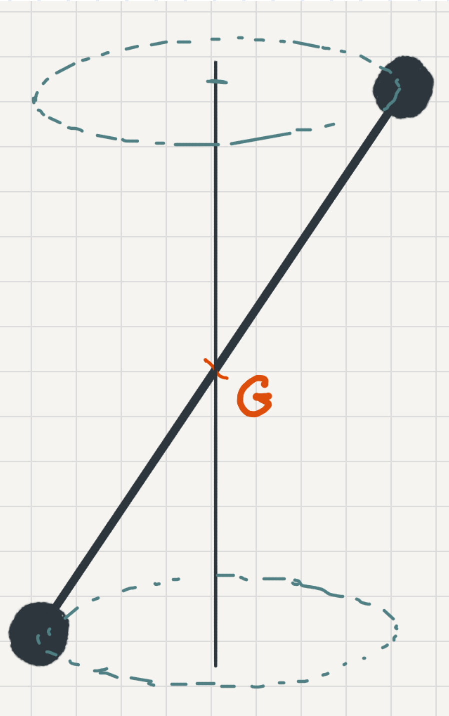
$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

Soit un solide en rotation autour d'un axe passant par G. On place l'axe (Gz) de manière que ce soit l'axe de rotation. Le vecteur rotation est alors
$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

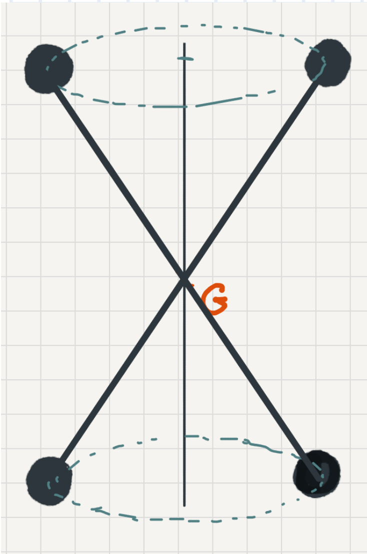


Cas simple : "haltère" en rotation, dont la tige a une masse négligeable.



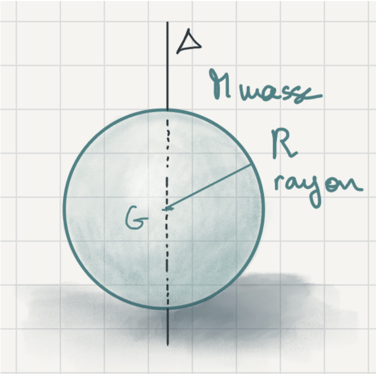

G

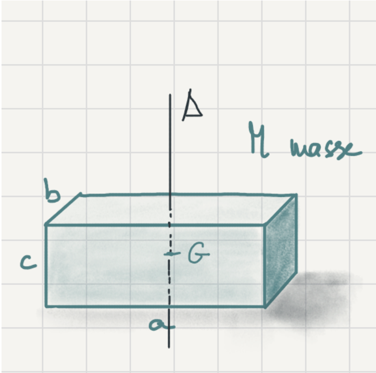
En général, le moment cinétique n'est pas parallèle à l'axe de rotation. Sauf si il y a une certaine symétrie dans la répartition de la masse :

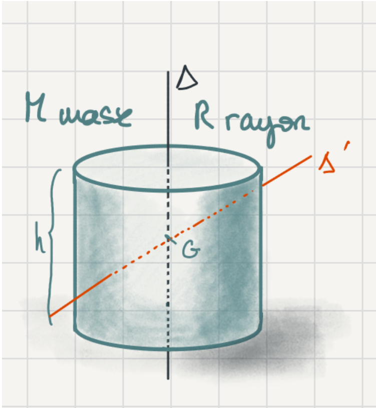


Dans certains cas $\vec{L}_G//\vec{\omega}$. Alors : $\vec{L}_G = I_{Gz}\vec{\omega}$

Exemples de cas symétriques (solides usuels) :







Exemple : Poulie (disque plein homogène) fixée à un axe

Table des matières

7 - Solide qui roule

Problématique

Parfois, on souhaite utiliser un point *non fixe* pour étudier le mouvement.

Peut-on utiliser : $\vec{L}_X = I_\Delta \vec{\omega}$?

(O, x, y, z) peuvent-ils être axes principaux d'inertie ?

Oui, si (G, x, y, z) sont axes principaux d'inertie et si O appartient à un axe principal d'inertie.

Dans ce cas, pour une rotation autour de (Oz) :

$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ et $\vec{L}_O = I_{Oz}\vec{\omega}$.

Explication intuitive :

En résumé :

Pour pouvoir utiliser

$$\vec{M}_A^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t}$$

Il faut que A

- soit fixe dans le référentiel
- OU confondu avec le c.d.m.
- OU se déplace à une vitesse colinéaire à celle du c.d.m.

Pour pouvoir calculer $\vec{L}_A$ avec $\vec{L}_A = I_{Az}\vec{\omega}$, il faut que (Az)

- soit un axe principal d'inertie
- ET que $A = G$ OU A est un point du solide à vitesse nulle.

Retour sur notre cylindre en rotation

Comparaison translation / rotation

Table des matières

8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

Cas ou l'axe de rotation passe par G, centre de masse :

En fait, de manière générale :

$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega}$$

avec :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

$\underline{I}$ est le tenseur d'inertie, il dépend de l'origine et des axes choisis.

Tenseur d'inertie : choix des axes

8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

$\underline{I}$ peut aussi s'écrire comme :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int(x^2+y^2+z^2)dm & 0 & 0 \\ 0 & \int(x^2+y^2+z^2)dm & 0 \\ 0 & 0 & \int(x^2+y^2+z^2)dm \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \int x^2 dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int y^2 dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int z^2 dm \end{bmatrix}$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$