IX. Moment cinétique ; Gravitation

Dr. Yves Revaz

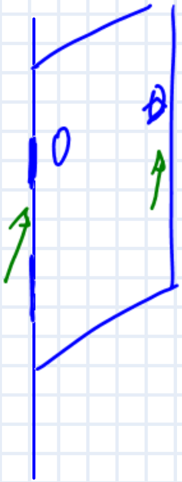
2025

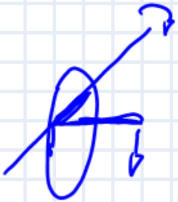
Plan du cours

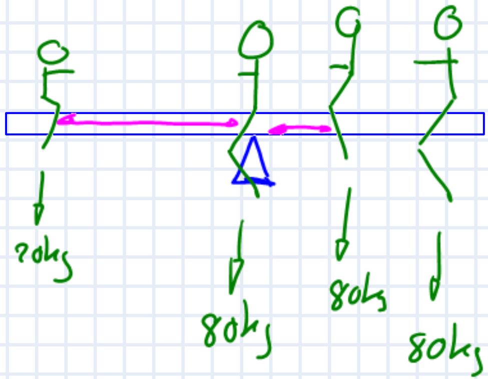
Table des matières

1 - Moment cinétique et moment d'une force.

Bras de levier

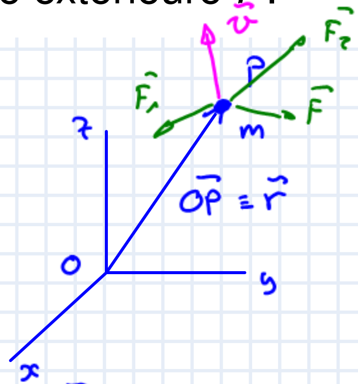






- **Le moment cinétique** permet de caractériser la rotation autour d'un point O
- **le moment de la force** permet de caractériser la capacité d'une force à provoquer un mouvement de rotation.

Point P de masse *m*, ayant une quantité de mouvement $\vec{p}$ et soumis à une force extérieure $\vec{F}$.



① définition : le moment cinétique par rapport à un point O

$$\boxed{\vec{L}_O := \vec{OP} \times \vec{p} = \vec{OP} \times m\vec{v}}$$

② définition : le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un point O

$$\boxed{\vec{M}_O := \vec{OP} \times \vec{F}}$$

$$\vec{F}_{tot} = \sum \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{O,tot} = \vec{OP} \times \vec{F}_{tot} = \vec{OP} \times \sum_i \vec{F}_i$$

$$= \sum \vec{OP} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_{O,i}$$

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \times \vec{p} \qquad \vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F}$$

2ème Loi de Newton $\qquad \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O) = \frac{d}{dt}(\vec{OP} \times m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{OP} \times m\vec{v} + \vec{OP} \times \underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{v})}_{\vec{p}}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} = \vec{OP} \times \vec{F}$$

$$= \vec{M}_O$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{L}_O) = \vec{M}_O}$$

Le théorème du moment cinétique

Le **moment cinétique** par rapport au point O est :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p}$$

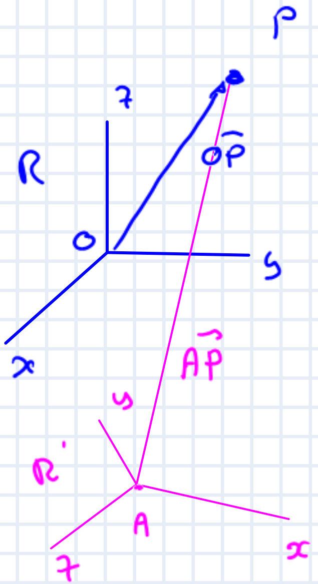
Le **moment de la force** $\vec{F}$ par rapport au point O est :

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{L}_0\right) = \vec{M}_0}$$

Choix du point de référence



$$\vec{L}_O = \vec{OP} \times \vec{p}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O$$

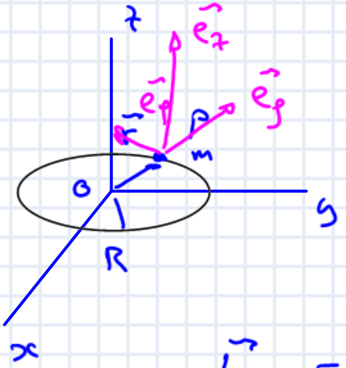
$$\vec{L}_A = \vec{AP} \times m\vec{v}_{R'}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{L}_A = \vec{M}_A}$$

si A est tel que $\vec{v}_R(A) = 0$

Exemple 1 : mouvement circulaire

$$\vec{L}_O \stackrel{\circ}{=} \vec{OP} \times \vec{p}$$



coord cyl.

$\rho = R \qquad z = 0$

$\dot{\rho} = 0 \qquad \dot{z} = 0$

$$\vec{OP} = \rho\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \cancel{\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho} + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \cancel{\dot{z}\,\vec{e}_z}$$

$$= \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L}_O = (\rho\,\vec{e}_\rho) \times (m\,\rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{L}_O = m R^2 \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$\dot{\varphi} = \omega$

$$\boxed{\vec{L}_O = m R^2 \omega\,\vec{e}_z}$$

$\sim \vec{e}_z$

$\sim \omega$

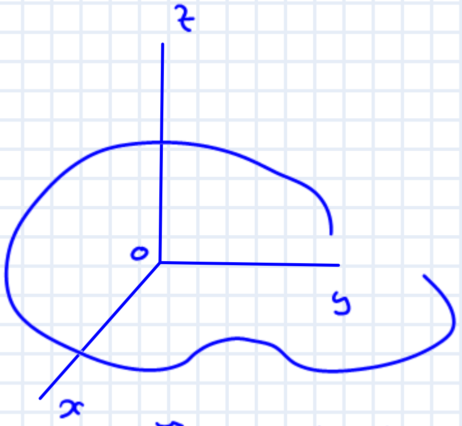
$\sim m$

$\sim R^2$

Exemple 2 : mouvement curviligne plan en coordonnées cylindriques

$$\vec{L}_O \doteq$$

$$\rho = R(t)$$
$$\dot{\rho} \neq 0$$



$$\vec{OP} = \rho(t)\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \cancel{\dot{z}\,\vec{e}_z}$$

$$z = 0$$
$$\dot{z} = 0$$

$$\vec{L}_O = (\rho\,\vec{e}_\rho) \times m\,(\underset{0}{\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho} + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)$$

$$= m\,\rho^2\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \qquad \dot{\varphi} = \omega(t)$$

$$\boxed{\vec{L}_O = m\,\rho^2(t)\,\omega\,\vec{e}_z}$$

Corollaire du théorème du moment cinétique :
Le moment cinétique d'un système isolé est constant
(grandeur conservée)

En effet, si le système est isolé, alors

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0$$

et donc

$$\vec{M}_0 = 0$$

Et comme, d'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{L}_0\right) = \vec{M}_0 = 0$$

on en déduit que :

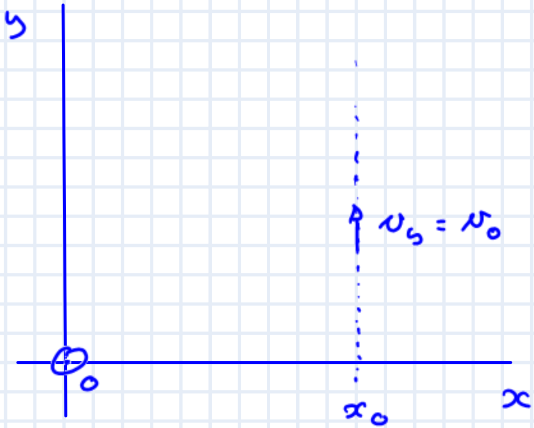
$$\vec{L}_0 = cte$$

Exemple 3 : mouvement rectiligne uniforme

$\vec{F} = 0$

$x = x_0$

$\dot{x} = 0$



$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$$

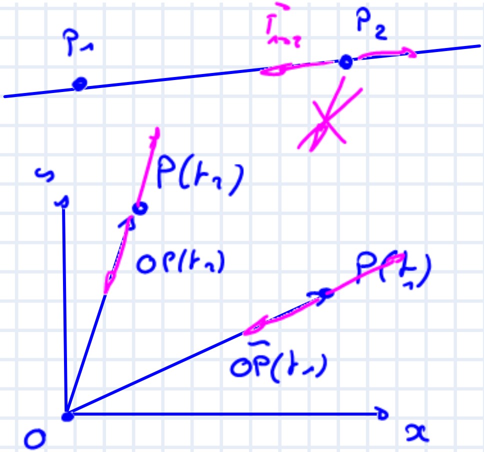
$$= \left(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y\right) \times m\left(v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y\right)$$

$$= \left(x_0\,\vec{e}_x + (v_0 t)\,\vec{e}_y\right) \times m\left(v_0\,\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{L}_0 = m\,x_0\,v_0\,\vec{e}_z = \vec{cte}$$

Table des matières

2 - Force centrale



Une force centrale de centre O est telle que $\vec{F}$ est toujours colinéaire à $\vec{OP}$.

$$\vec{F} = F \cdot \vec{e_r}$$

Exemples : force electromagnétique
force de gravité

$$\vec{M}_O := \vec{OP} \times \vec{F}$$

$$= r\vec{e_r} \times F\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = 0}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O) = \vec{M}_O = 0$$

$$\boxed{\vec{L}_O = cte}$$

Résumé :

Une force centrale de centre O est telle que $\vec{F}$ colinéaire à $\overrightarrow{OP}$

Le moment par rapport à O d'une force centrale de centre O est nul.

Donc le moment cinétique par rapport à O d'un point soumis à une force centrale de centre O est constant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_O = \vec{0}}$$

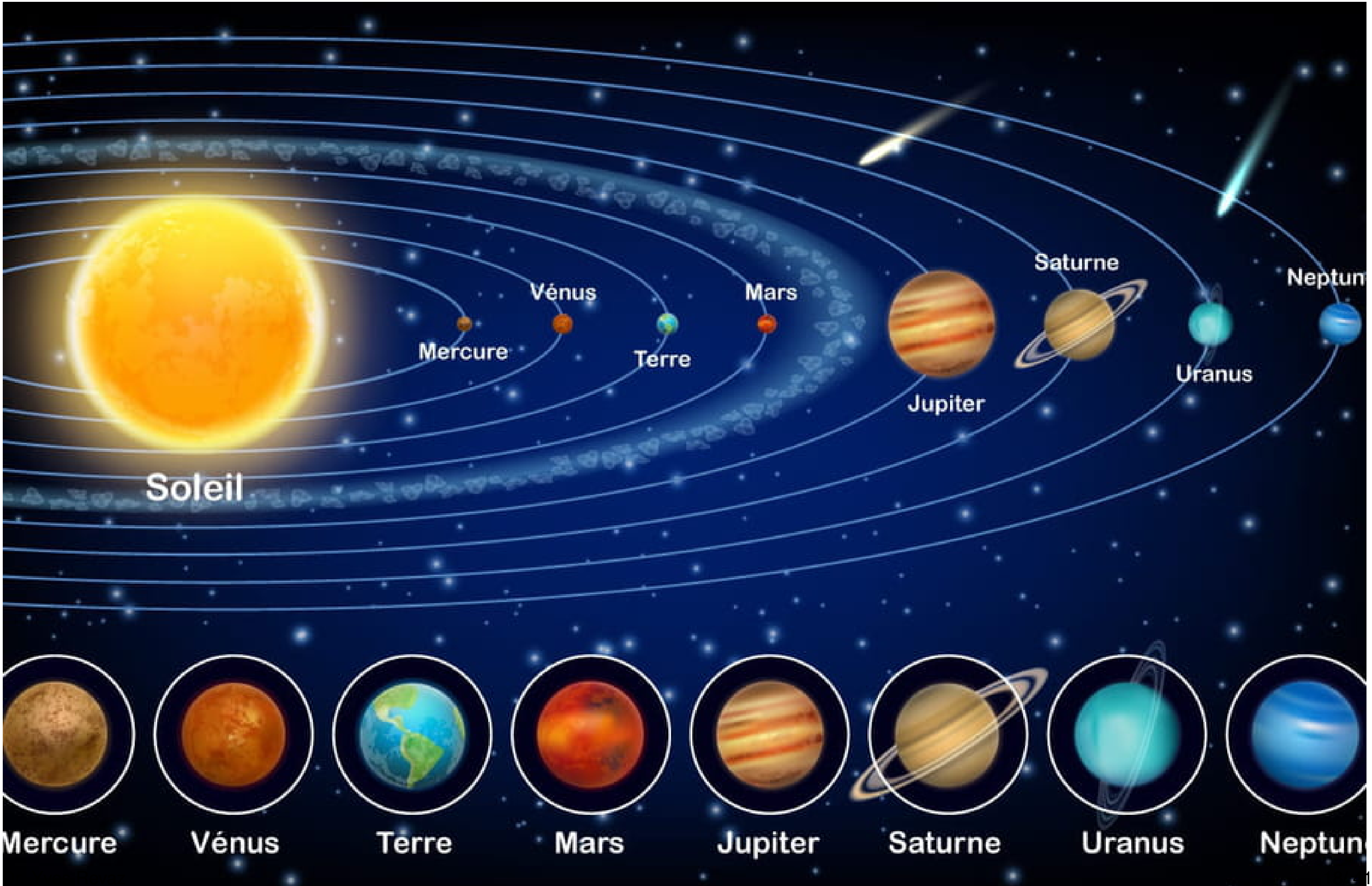
$L_o = m\, x\, v = \text{cte}$

$x(t)\, v(t)$

$x(v) = \frac{L_o}{m v}$

Table des matières


Isaac
Newton
(1643-1727)
Je vais faire une tarte moi !


Soleil
Mercure
Vénus
Terre
Mars
Jupiter
Saturne
Uranus
Neptun
Vénus
Terre
Mars
Jupiter
Saturne
Uranus
Neptun

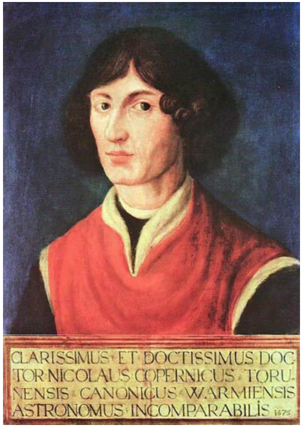
3 - Gravitation : les grandes structures de l'Univers

https://longread.epfl.ch/en/dossier/archaeology-of-light/

3 - Gravitation : les galaxies

3 - Gravitation

Rappel historique :



Nicolas Copernic :
1473 – 1543

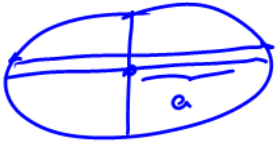
- théorie de **l'héliocentrisme** : la Terre tourne autour du Soleil, supposé au centre de l'Univers
- *De Revolutionibus Orbium Coelestium (Des révolutions des sphères célestes)*, 1543

3 - Gravitation

Rappel historique :

Tycho Brahe :
1546 – 1601

- observations très précises des positions de la planète Mars
- **géo-héliocentrique** : la Terre reste immobile au centre de l'univers, les autres planètes tournent autour du soleil



3 - Gravitation

Rappel historique : lois de Kepler (1571-1630) :

Johannes Kepler :
1571 – 1630

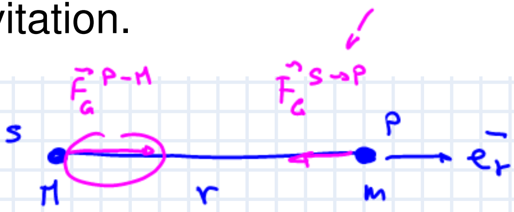
1– Les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers.

2– Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.

3– Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(2a_1)^3}{(2a_2)^3}$$

Grâce aux lois de Kepler, Newton arrive à l'expression de la force de gravitation.



$$\vec{F}_G^{P\to M} = - \vec{F}_G^{M\to P}$$

$$F_G^{P\to M} = \frac{GMm}{r^2}\,\vec{e}_r$$

$$F_G^{M\to P} = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{e}_r$$

$$F_G \sim \frac{1}{r^2} \qquad \vec{F} \sim \vec{e}_r$$

$$F_G \sim mM$$

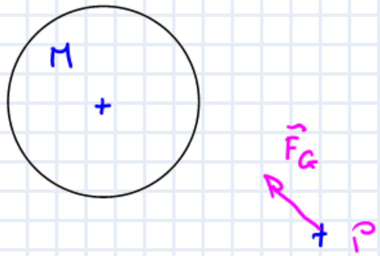
$$\boxed{\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{e}_r}$$

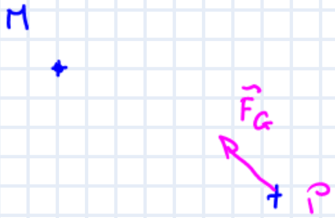
G : constante universelle de la gravitation

$6.67\;10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$

Théorèmes de Newton

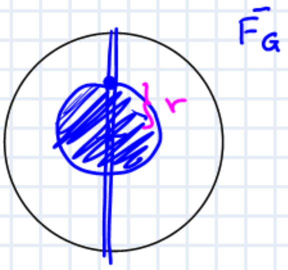
1er th. Newton



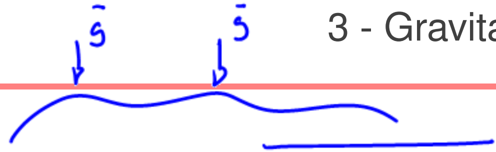


$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}$$

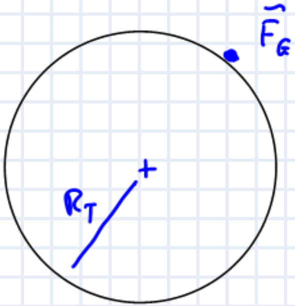
2ème th. Newton



$$\vec{F}_G = -\frac{GM(<r)\,m}{r^2}$$



Liens entre gravitation et poids.



- $\vec{P} = -m\vec{g}$
- $\vec{F_G} = -\dfrac{GmM}{R_T^2}\vec{e_r}$

$$\vec{P} = \vec{F_G}$$

$$\cancel{m}\vec{g} = \frac{G\cancel{m}M_T}{R_T^2}\vec{e_r}$$

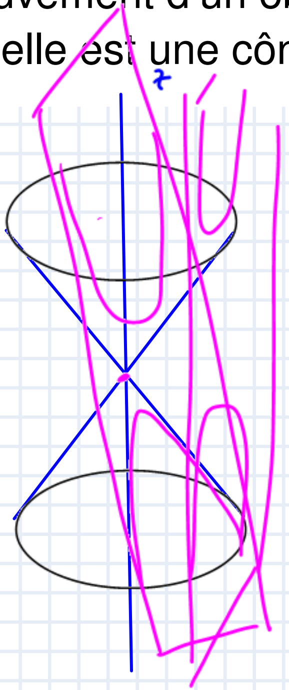
$$g = |\vec{g}|$$

$$\boxed{g = \frac{GM_T}{R_T^2}}$$

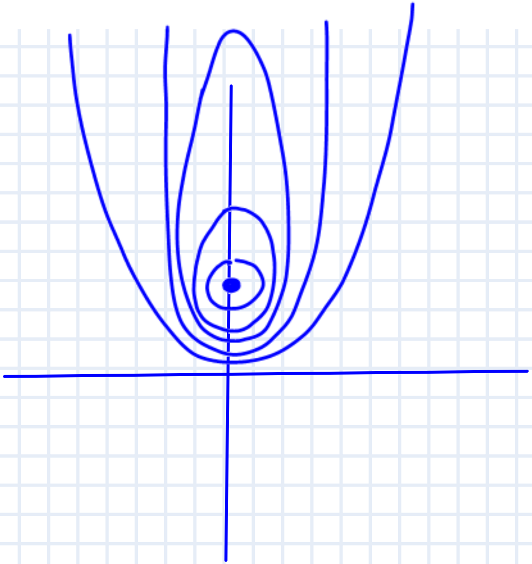
$$= 9.81\ \frac{m}{s^2}$$

Des lois de Newton on retrouve les lois de Kepler (élargies)

Le mouvement d'un objet dans le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle est une cônique. La masse ponctuelle occupe le foyer.

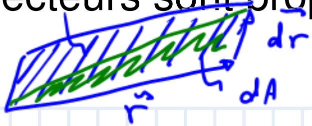


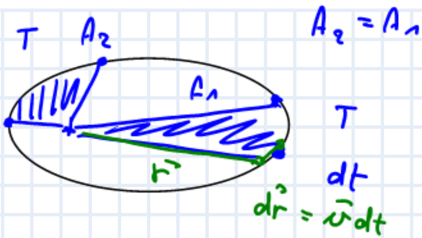
1 cercle
2 ellipse
3 parabol
4 hyperbol



Deuxième loi de Kepler

Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.





$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\,dt\right| = \frac{1}{2}\,dt\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{cte}$$

$$\frac{L_O}{m} = \left|\vec{r} \times \vec{v}\right|$$

$$dA = \frac{1}{2}\,dt\,\frac{L_O}{m} = \frac{L_O}{2m}\,dt$$

$$A(T) = \int_0^T \frac{L_O}{2m}\,dt = \frac{L_O}{2m}\int_0^T dt = \frac{L_O}{2m}\,T$$

Cas le plus simple : mouvement circulaire

analyser le mouvement ; montrer qu'il est uniforme ; Calculer la vitesse en fonction du rayon de la trajectoire.

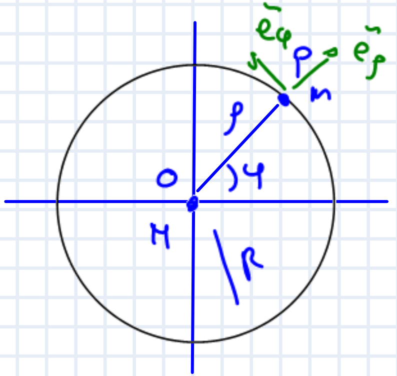
$$\sum \vec{F}^{ext} = \vec{F}_G = m\vec{a}$$

coord polaire

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{\rho^2}\vec{e}_\rho$$

$\rho = R$

$\dot{\rho} = 0$



$$m\vec{a} = m\left(-\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_\rho + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\varphi\right)$$

$$-\frac{GMm}{R^2}\vec{e}_\rho = -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho + m\frac{dv}{dt}\vec{e}_\varphi$$

$\vec{e}_\rho$: $\cancel{+}\frac{GM\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} = \cancel{+}\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R}}$

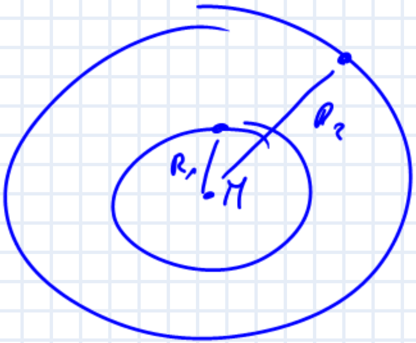
$$\boxed{v^2 = \frac{GM}{R}} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

$\vec{e}_\varphi$: $\frac{dv}{dt} = 0$ $\qquad v = \text{cte (norme)}$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Période

$$T = \frac{D}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$



$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{R_2^3}{GM}}$$

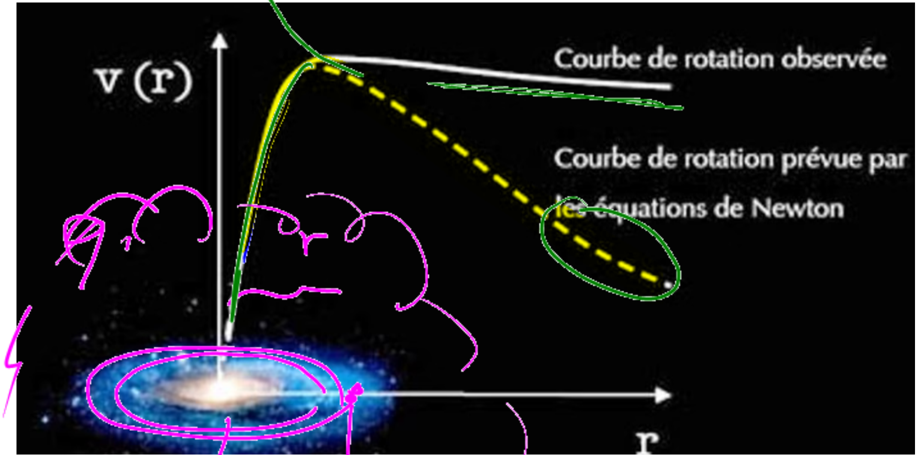
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\cancel{4\pi^2}}{\cancel{4\pi^2}}\,\frac{R_1^3}{R_2^3}\,\frac{\cancel{GM}}{\cancel{GM}} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

$\rightarrow$ 3ème Loi de Kepler

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3}$$

on peut déduire la masse M de l'objet connaissant R, T

Matière noire dans les galaxies



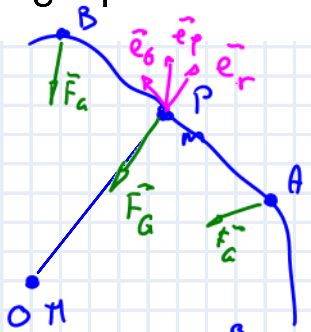
$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \sim R^{-1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{R}}$$

Table des matières

4 - Analyse énergétique de la force gravitationnelle

Énergie potentielle de gravitation :

$$W_{AB}^{F_G} = \int_A^B \vec{F}_G \cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \vec{v}\, dt$$



$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$W_{AB}^{F_G} = \int_A^B \left(-\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r\right)\cdot\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\underbrace{\vec{e}_\theta}_{0} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\underbrace{\vec{e}_\varphi}_{0}\right)dt$$

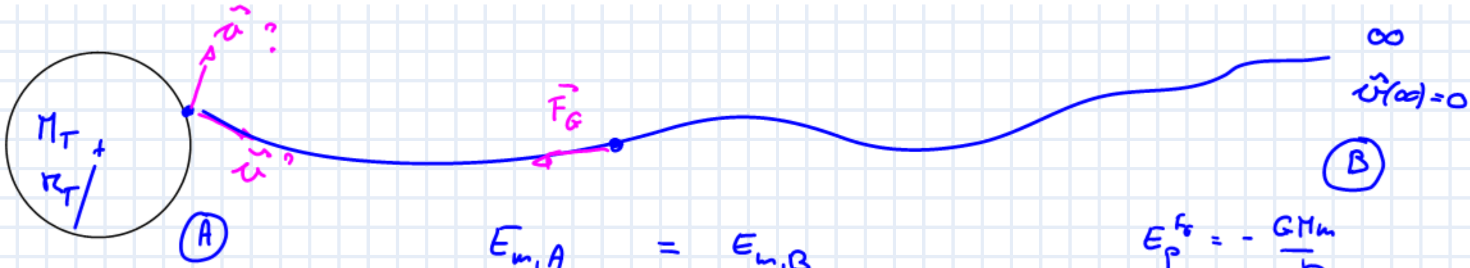
$$= \int_A^B -\frac{GMm}{r^2}\underbrace{\dot{r}\,dt}_{\frac{dr}{dt}\cdot dt} = -GMm\int_A^B \frac{dr}{r^2} = -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B$$

$$= -\frac{GMm}{r_A} - \left(-\frac{GMm}{r_B}\right) = E_p(A) - E_p(B)$$

$$\boxed{E_{p,F_G} = -\frac{GMm}{r}}$$

Vitesse de libération

Quelle est la vitesse de libération d'un objet sur Terre ? (Vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de la terre)



$$E_{m,A} = E_{m,B}$$

$$E_p^{G} = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\infty} = 0$$

$$E_{c,A} + E_{p,A} = \underbrace{E_{c,B}}_{0} + \underbrace{E_{p,B}}_{0}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 - \frac{GM_T\cancel{m}}{R_T} = 0$$

$$\boxed{v_A = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}}}$$

v_A vitesse de libération

$= 11 \frac{km}{s}$

Trous noirs

Un trou noir est un object pour lequel la lumière (les photons) ne peut pas s'échapper.

Trous noirs de Schwarzschild

Un trou noir de Schwarzschild est un trou noir qui se caractérise par une bf charge nulle et un **moment cinétique nul (pas de rotation)**.

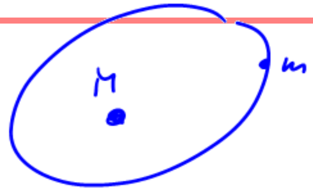
$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}}$$

$$\boxed{v_A = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$$

$$\boxed{R_S = \frac{2GM}{c^2}}$$

Pour la terre $R_S = 3\,\mathrm{km}$

Notion d'énergie potentielle effective



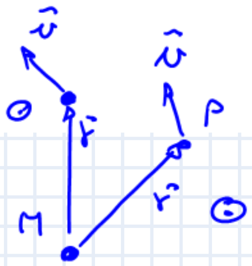
Conservation de l'énergie

$$E = E_c + E_p = \text{cte}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \text{cte}$$

$r, \dot{r}$?

$\varphi, \dot{\varphi}$



$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$

→ Mouvmt tj dans un plan "plan orbital"

→ 2D

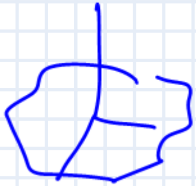
→ coord polaires $r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$

coord polaires $\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho = r\,\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = m r^2 \dot{\varphi}\,\vec{e}_z = cte$$



$\dot{\varphi} = \omega$

$$L_O = m r^2 \dot{\varphi} \rightsquigarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{L_O}{m r^2}}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{L_O^2}{m^2 r^4}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left(r^2 \frac{L_O^2}{m^2 r^4} \right) - \frac{GMm}{r}$$

$$\boxed{E = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{L_O^2}{2 m r^2} - \frac{GMm}{r}}_{E_{r,\text{eff}}}}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L_O^2}{mr^2} - \frac{GmM}{r}}_{E_{p,\text{ effective}}}$$

Force effective :

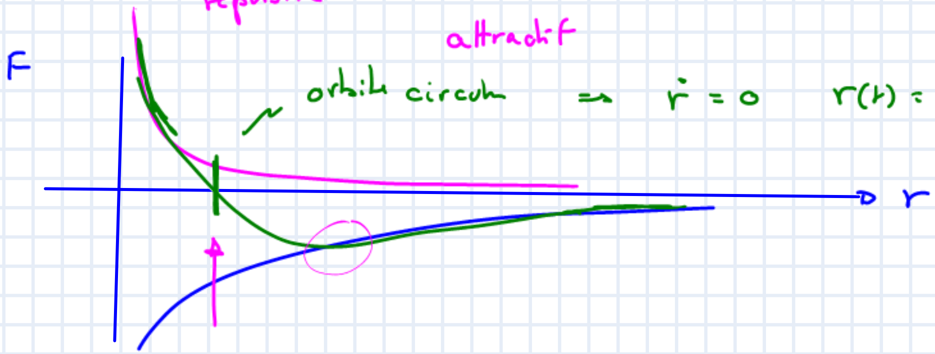
$$F = -\frac{d}{dr}E_p$$

$$F = \underbrace{\frac{2}{2}\frac{L_o^2}{m}\frac{1}{r^3}}_{\text{répulsive}} - \underbrace{\frac{GmM}{r^2}}_{\text{attractif}}$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{L_o}{mr^2}} = \text{cte}$$

$\varphi(t) = \dot{\varphi}\cdot t$

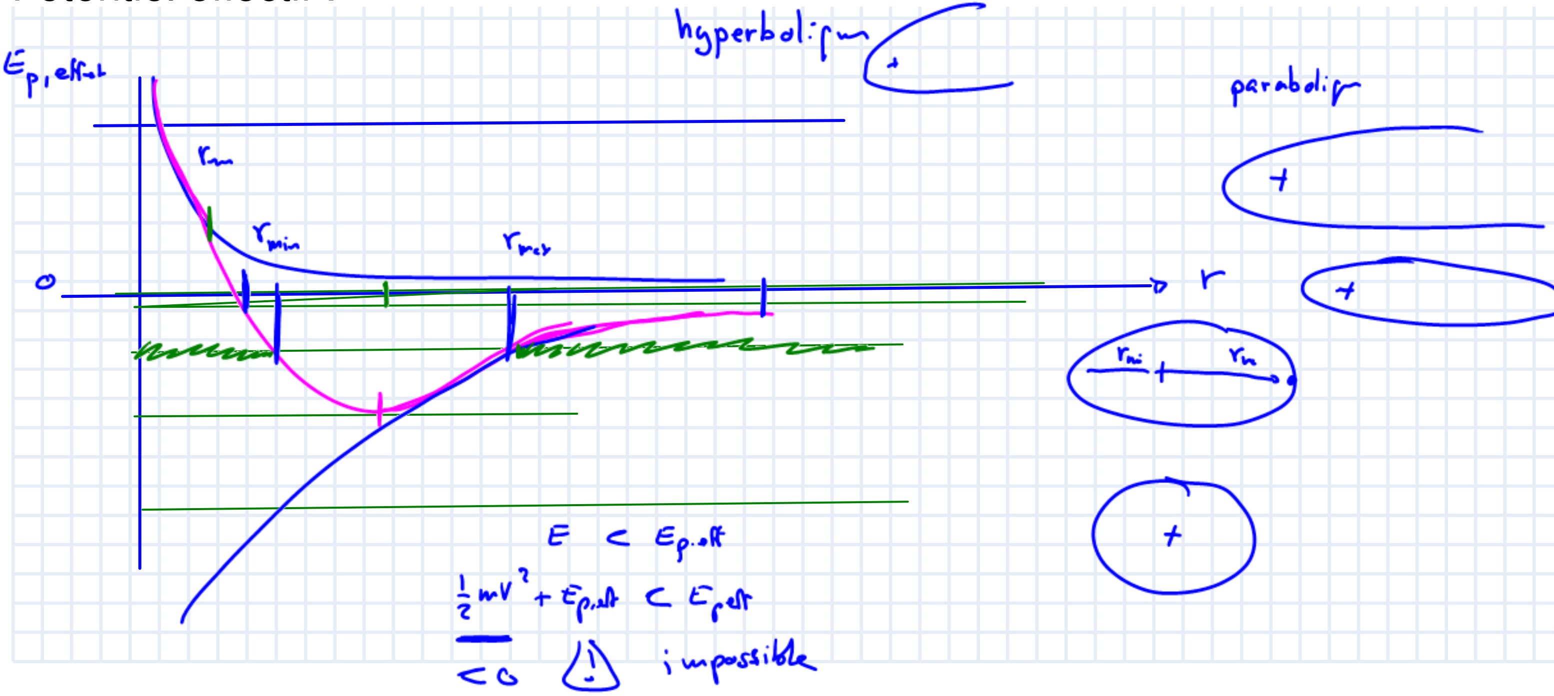
$\omega \cdot t$



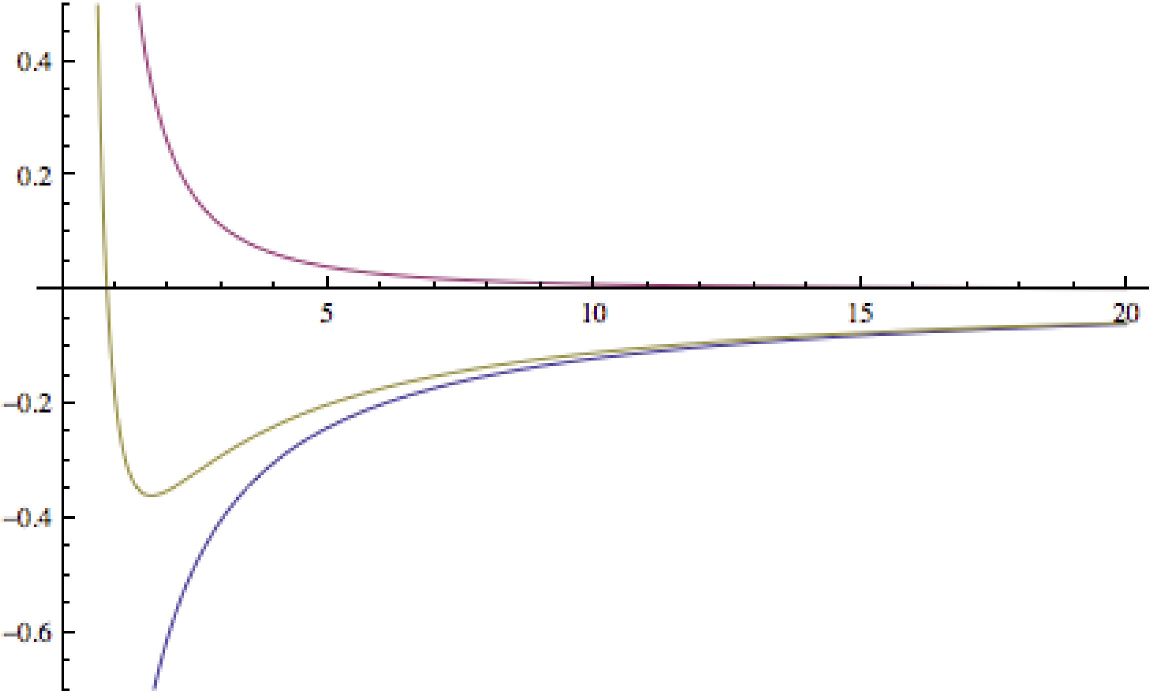
orbite circulaire $\Rightarrow$ $\dot{r} = 0$ $r(t) = \text{cte}$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L_O^2}{mr^2} - \frac{GmM}{r}}$$

Potentiel effectif :



$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_O^2}{mr^2} - \frac{GmM}{r}$$


0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
5
10
15
20