VIII - Oscillateur harmonique

Dr. Yves Revaz

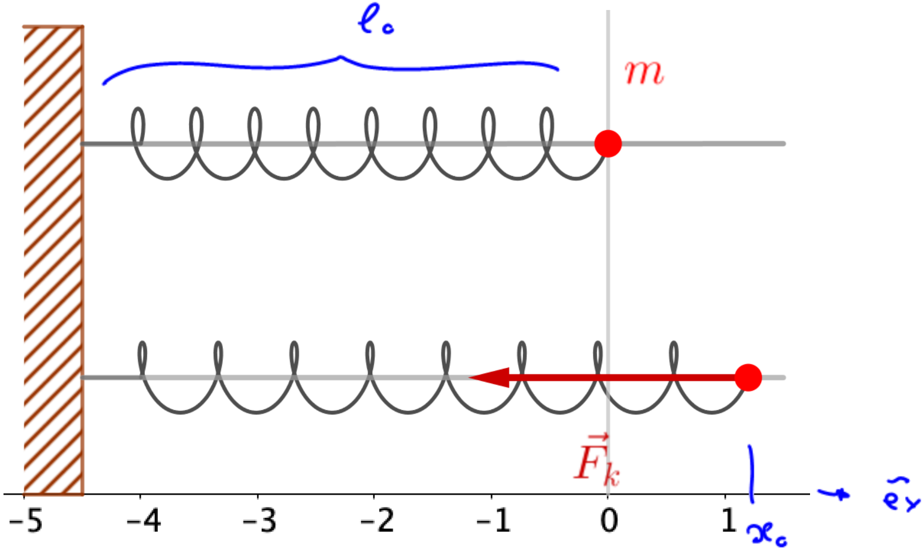
2025

Plan du cours

Table des matières

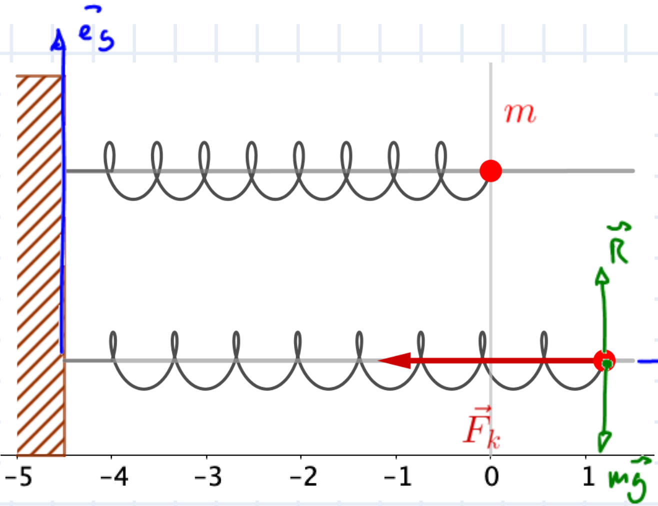
1. Oscillations libres non amorties

Une masse m **glisse sans frottements** sur un axe horizontal. Elle est retenue par un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 fixé à son autre extrémité.
On tire la masse vers la droite et à $t = 0$ on la lâche sans vitesse initiale.



x_0

$\underline{x(t)} = ?$



2ème Loi de Newton $\sum \vec F^{ex} = m\vec a$

$$\vec F_k + m\vec g + \vec R = m\vec a$$

$$m\vec g = -mg\,\vec e_y \qquad \vec R = R\,\vec e_y$$

$$\vec F_k = -kx\,\vec e_x$$

$$m\vec a = a_x\vec e_x + \underbrace{a_y\vec e_y}_{0} \qquad a_x = \ddot x \qquad v_x = \dot x$$

$\vec e_x$: $m a_x = -kx \rightarrow m\ddot x(t) = -kx(t)$

$\vec e_y$: $0 = -mg = R \qquad R = mg$

$$[\Omega_0] = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{N}{m}\cdot\frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{\cancel{kg}\,\cancel{m}}{s^2}\cdot\frac{1}{\cancel{m}}\cdot\frac{1}{\cancel{kg}}}$$

$$[\Omega_0] = \frac{1}{s}$$

$$m\ddot x + kx = 0$$

$$\boxed{\ddot x + \frac{k}{m}x = 0}$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\ddot x + \Omega_0^2 x = 0}$$

Ω_0 : pulsation

Equation différentielles de type : $\boxed{\ddot{x}(t) + \Omega_0^2\, x(t) = 0}$

Equ. diff.
- 2ème ordre
- linéaire

$x_1(t)$, $x_2(t)$ } $x_1(t)$, $x_2(t)$

$x(t) = \cos(t)$ $\quad \dot{x}(t) = -\sin(t)$ $\quad \ddot{x}(t) = -\cos(t)$

$x(t) = A\cos(\Omega_0 t)$ $\quad \dot{x}(t) = -A\,\Omega_0 \sin(\Omega_0 t)$ $\quad \ddot{x}(t) = -A\Omega_0^2 \cos(\Omega_0 t)$

$B\sin(\Omega_0 t)$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\Omega_0 t) + B\sin(\Omega_0 t)}$$

$$\boxed{x(t) = C\cos(\Omega_0 t + \varphi)}$$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$$C\left(\cos(\Omega_0 t)\cos(\varphi) - \sin(\Omega_0 t)\sin\varphi\right)$$

$$\underbrace{C\cos(\varphi)}_{A}\cos(\Omega_0 t) - \underbrace{C\sin\varphi}_{B}\sin(\Omega_0 t)$$

$$\boxed{x(t) = D\sin(\Omega_0 t + \varphi)}$$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Avec les conditions initiales

$$x(t=0) = x_0 \qquad \dot{x}(t=0) = 0$$

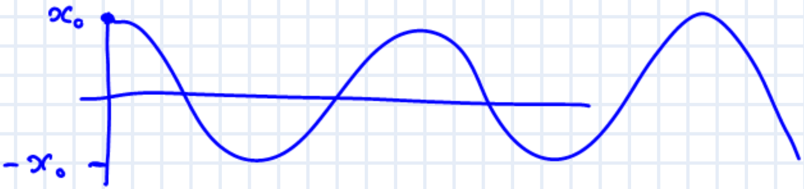
$$x(t) = A\cos(\Omega_0 t) + B\sin(\Omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = -A\sin(\Omega_0 t)\,\Omega_0 + B\cos(\Omega_0 t)\,\Omega_0$$

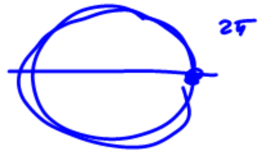
$$x(t=0) = \boxed{A = x_0}$$

$$\dot{x}(t=0) = B\Omega_0 = 0 \qquad \boxed{B = 0}$$

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\Omega_0 t)}$$



Ω_0 : pulsation f : fréquence T : période

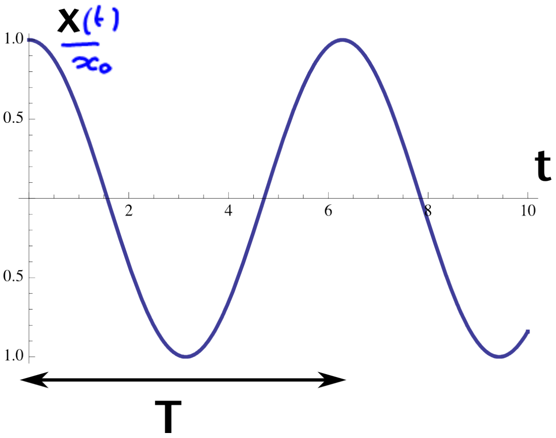


Position en fonction du temps

$$\cos(\Omega_0(t+T)) \stackrel{?}{=} \cos(\Omega_0 t)$$

$$\cos(\Omega_0 t + \underbrace{\Omega_0 T}_{2\pi}) = \cos(\Omega_0 t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$



T période des oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

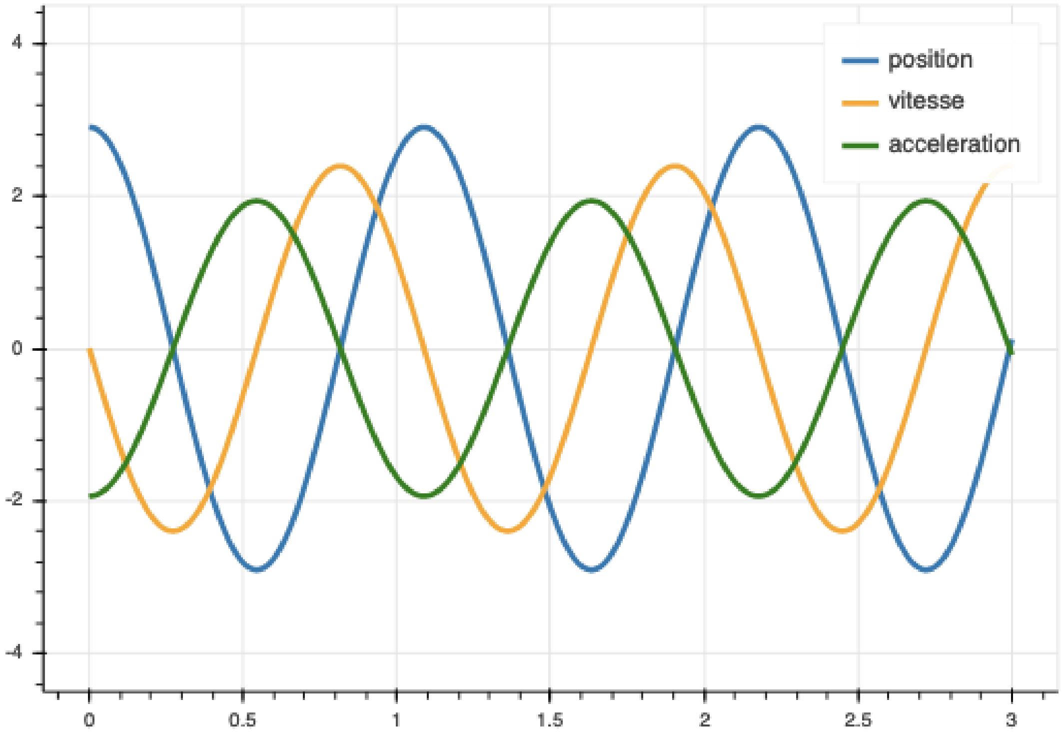
$$f = \frac{1}{T}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\Omega_0 t) \\ \dot{x}(t) = -x_0 \Omega_0 \sin(\Omega_0 t) \\ \ddot{x}(t) = -x_0 \Omega_0^2 \cos(\Omega_0 t) \end{cases}$$

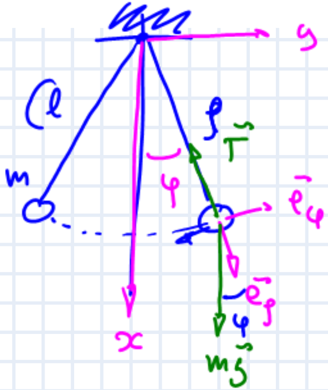
T indépendant de x_0. Oscillateur harmonique.

Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.

Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.



Autre exemple d'oscillateur : le pendule simple



Coord. polaires $(\rho,\varphi) - (\vec e_\rho, \vec e_\varphi)$

Forces : $m\vec g$, T

$$m\vec g = mg\cos(\varphi)\,\vec e_\rho \quad - mg\sin(\varphi)\,\vec e_\varphi$$

$$\vec T = -T\,\vec e_\rho$$

$$\sum \vec F^{ext} = m\vec a$$

$$\rho = \ell \qquad \dot\rho = 0 \qquad \ddot\rho = 0$$

$$m\vec a = m(\cancel{\ddot\rho} - \rho\dot\varphi^2)\,\vec e_\rho + m(\rho\ddot\varphi + \cancel{2\dot\rho\dot\varphi})\,\vec e_\varphi$$

$\vec e_\rho$: $mg\cos(\varphi) - T(t) = -m\rho\dot\varphi^2$

$\vec e_\varphi$: $\boxed{-mg\sin(\varphi) = m\rho\ddot\varphi}$

$\ell \quad \varphi(t) \quad \dot\varphi(t) \quad \ddot\varphi(t)$

?

$$\cancel{m}\ell\ddot\varphi + \cancel{m}g\sin(\varphi) = 0$$

$$\ddot\varphi + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0$$

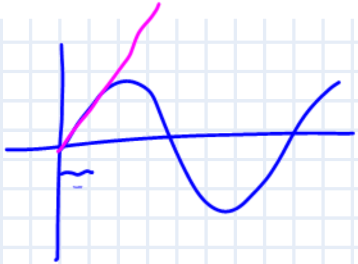
$$\boxed{\ddot\varphi + \Omega_0^2\sin\varphi = 0}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \sin\varphi = 0}$$

non linéaire

$\varphi_1(t)$
$\varphi_2(t)$



$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

$$\sin\varphi \simeq \varphi$$

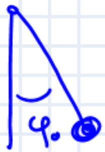
$\varphi(t) \ll 1$ $\quad \sin(\varphi(t)) \simeq \varphi(t)$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi(t) = 0}$$

oscillateur harmonique

T cte $\quad x_0$

φ_0



$$\boxed{\ddot{\varphi} + \Omega_0^2\,\varphi(t) = 0} \qquad \Omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

$$\varphi(t) = A\cos(\Omega_0 t) + B\,\cancel{\sin}(\Omega_0 t) \qquad \varphi(t=0) = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(t) = -A\sin(\Omega_0 t)\,\Omega_0 + B\cos(\Omega_0 t)\,\Omega_0 \qquad \dot{\varphi}(t=0) = 0$$

$$\varphi(t=0) = A = \varphi$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = B\Omega_0 = 0 \qquad B = 0$$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0\cos(\Omega_0 t)}$$

<u>$\varphi \ll 1$</u>

$\varphi = 10^\circ$ $\quad \varphi = 0.174$ rad $\quad \sin(0.174) = 0.173$

$\varphi = 20^\circ$ $\quad \varphi = 0.349$ rad $\quad \sin(0.349) = 0.342$

$\varphi = 30^\circ$ $\quad \varphi = 0.523$ rad $\quad \sin(0.523) = 0.5$

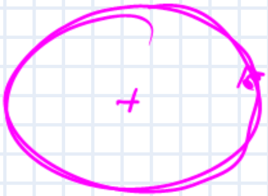


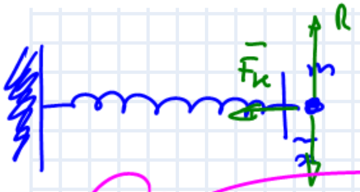
Table des matières

2. Oscillateurs non amortis et énergie

Cas de l'oscillateur harmonique avec un ressort

$\vec{R}$, $m\vec{g}$ ne travaille pas

$\vec{F}_k$



$$E_m = \underbrace{E_c}_{E_c(t)} + \underbrace{E_p}_{E_p(t)} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$v^2 = \dot{x}^2$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\Omega_0 t) \\ \dot{x}(t) = -x_0 \Omega_0 \sin(\Omega_0 t) \end{cases}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(x_0^2 \Omega_0^2 \sin^2(\Omega_0 t)\right) + \frac{1}{2} k \left(x_0^2 \cos^2(\Omega_0 t)\right)$$

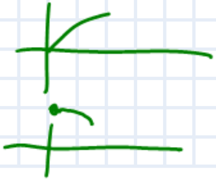
$$= \frac{1}{2} \cancel{m} \left(x_0^2 \frac{k}{\cancel{m}} \sin^2(\Omega_0 t)\right) + \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\Omega_0 t)$$

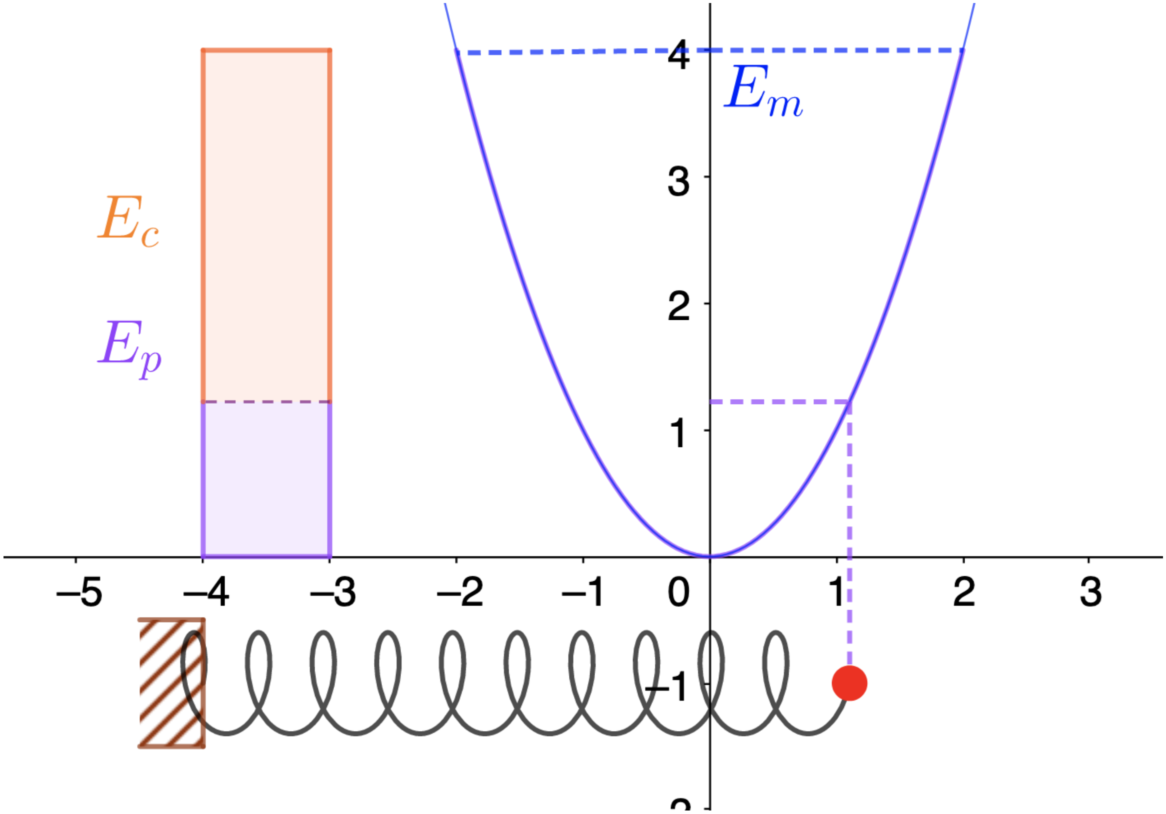
$$= \frac{1}{2} k x_0^2 \left(\underbrace{\sin^2(\Omega_0 t) + \cos^2(\Omega_0 t)}_{1}\right)$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k x_0^2}$$

indép. du temps

sin(t)




E_m
E_c
E_p
4
3
2
1
–5
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3
–1

Oscillateur quelconque

Cas à 1 dimension, pour une force qui dérive d'un potentiel :

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\,\vec{e}_x$

$\vec{F} = F\cdot\vec{e}_x = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{e}_x$

Eqn diff.

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_p}{dx}$$

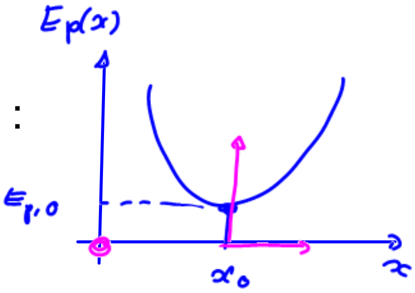
$E_p(x)$

$-\frac{dE_p(x)}{dx}$

C'est une autre moyen d'obtenir l'équation différentielle.

Pour avoir des oscillations, il faut être autour d'un *minimum* de E_p.

Oscillateurs harmoniques



Pour que l'oscillateur soit **harmonique**, il faut et il suffit que :

$$E_p(x) = A(x - x_0)^2 + E_{p,0}$$

avec A une constante positive (potentiel quadratique).

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(A(x - x_0)^2 + E_{p,0} \right)$$

$$m\ddot{x} = -A\,2(x - x_0)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2A}{m}x = \frac{2A}{m}x_0}$$

$$\ddot{x} + \frac{2A}{m}(x - x_0) = 0$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{2A}{m}X = 0}$$

Pt d'équilibre

$x = x_0$

$X = x - x_0$

$X(t) = x(t) - x_0$

$\dot{X}(t) = \dot{x}(t)$

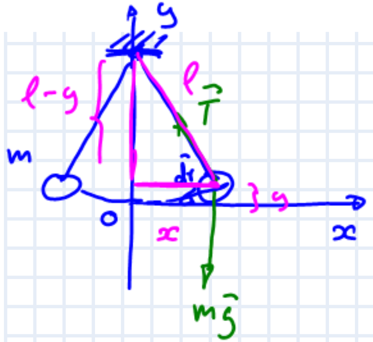
$\ddot{X}(t) = \ddot{x}(t)$

$$\ddot{X} + \Omega_0^2 X = 0 \qquad \Omega_0^2 = \frac{2A}{m}$$

#

Exemple : pendule simple

$E_p(x)$?



$$E_p^{m\vec{g}} = mgy$$

$$E_p^{\vec{T}} = 0 \qquad \vec{T} \perp d\vec{r}$$

$$x^2 + (\ell - y)^2 = \ell^2$$

$$(\ell - y)^2 = \ell^2 - x^2$$

$$\ell - y = \pm\sqrt{\ell^2 - x^2}$$

$$y = \ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}$$

$\varphi \ll 1$

$\cong \frac{x}{\ell} \ll 1$

$$\varepsilon := \frac{x^2}{\ell^2}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon} \cong 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$E_p(x) = mg\left[\ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}\right] \qquad \sim x^2$$

$$= mg\left[\ell - \ell\sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}}\right] = mg\ell\left[1 - \sqrt{1-\varepsilon}\right] = mg\ell\left[\cancel{1} - (\cancel{1} - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\right]$$

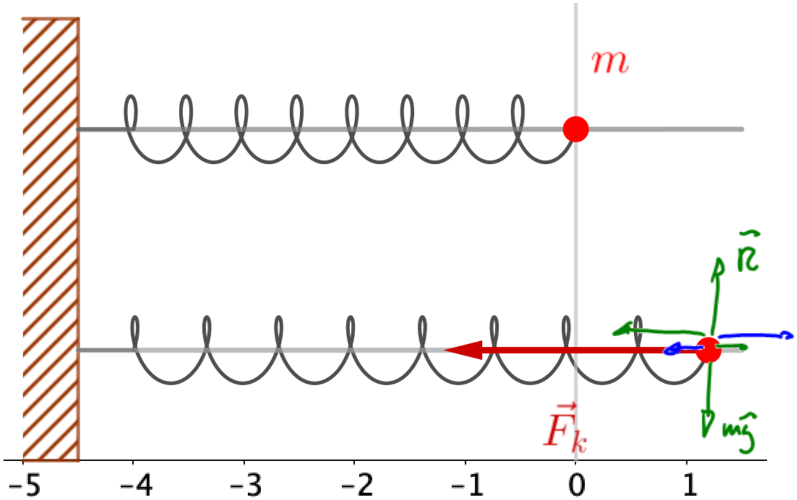
$$\boxed{E_p(x) = \frac{mg}{2}\ell\frac{x^2}{\ell^2} = \frac{mg}{2\ell}x^2}$$

$\Rightarrow$ oscillateur harmonique

Table des matières

3. Oscillations amorties

On considère un oscillateur harmonique, **qui subit un frottement visqueux** en régime laminaire.



Force de frottement visqueux

ηK

$$\vec{F}_f = -b_l \vec{v}$$

avec $\vec{v}$ vitesse.

On cherche $x(t)$:

$$\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a} = \underbrace{m\vec{g} + \vec{R}}_{0} + \vec{F}_k + \vec{F}_f$$

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - b_\ell \dot{x}(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + b_\ell \dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b_\ell}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$2\gamma = \frac{b_\ell}{m} \qquad \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0}$$

$$\frac{m}{s^2} \qquad \frac{1}{s}\cdot\frac{m}{s} \qquad \frac{1}{s^2}\, m$$

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$ homogène / caractéristique

Méthode générale de résolution d'une telle équation :

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + 2\gamma\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + \Omega_0^2 \cancel{e^{\lambda t}} = 0$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

Sol. de l'équ. homogène, form. de Viète

$\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1 \quad b = 2\gamma \quad c = \Omega_0^2$

$\lambda = \dfrac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\Omega_0^2}}{2}$

$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$

$\Delta' = \gamma^2 - \Omega_0^2$

$\Delta' = 0 \quad \gamma = \Omega_0 \quad \lambda = -\gamma$

$$\boxed{x(t) = (A + B\cdot t)\, e^{-\gamma t}}$$

$$\boxed{\Delta' > 0}$$

$$\gamma^2 > \Omega_0^2 \qquad \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2} \qquad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

$$< 0 \qquad\qquad < 0$$

$$\boxed{x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}}$$

$\boxed{\Delta' < 0}$ $\gamma^2 < \Omega_0^2$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \Omega_0^2}_{<0}}$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{-\underbrace{(\Omega_0^2 - \gamma^2)}_{>0}}$$

$$= -\gamma \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega^2} \qquad \omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2 \in \mathbb{R}_e$$

$$= -\gamma \pm i\omega$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\gamma + \omega i \\ \lambda_2 = -\gamma - \omega i \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = A e^{-\gamma t + \omega i t} + B e^{-\gamma t - \omega i t}}$$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} e^{i\omega t} + B e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(x(t)\right)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\in \mathbb{R}} \left[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \right]$$

$\in \mathbb{C}$ $\qquad\qquad\qquad \mathbb{C}$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \right]$$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

$$A = a_1 + i a_2 \qquad\qquad B = b_1 + i b_2$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[(a_1 + i a_2)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + (b_1 + i b_2)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \right]$$

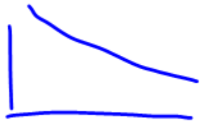
$$= e^{-\gamma t}\Big[a_1\cos(\omega t) + \cancel{i a_1 \sin(\omega t)} + \cancel{i a_2 \cos(\omega t)} - a_2\sin(\omega t)$$
$$b_1\cos(\omega t) \cancel{- i b_1 \sin(\omega t)} + \cancel{i b_2 \cos(\omega t)} + b_2\sin(\omega t) \Big]$$

$$= e^{-\gamma t}\left[a_1\cos(\omega t) + b_1\cos(\omega t) - a_2\sin(\omega t) + b_2\sin(\omega t) \right]$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \right]}$$

$$C\cos(\omega t + \varphi)$$

$e^{-\gamma t}$



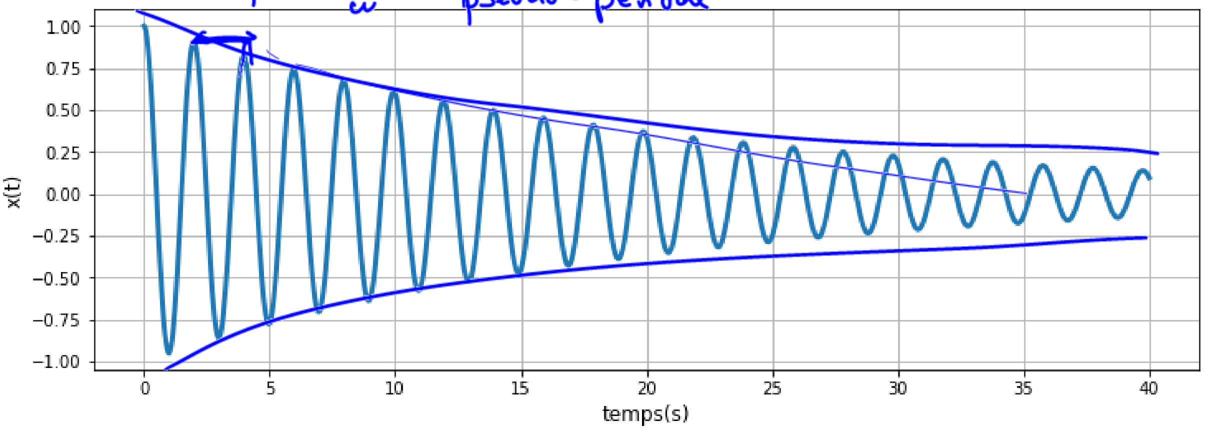
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

Si $\boxed{\gamma < \Omega_0}$ les solutions sont du type

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

Avec A et φ les constantes d'intégration et $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$

$T \sim \frac{2\pi}{\omega}$ pseudo-période



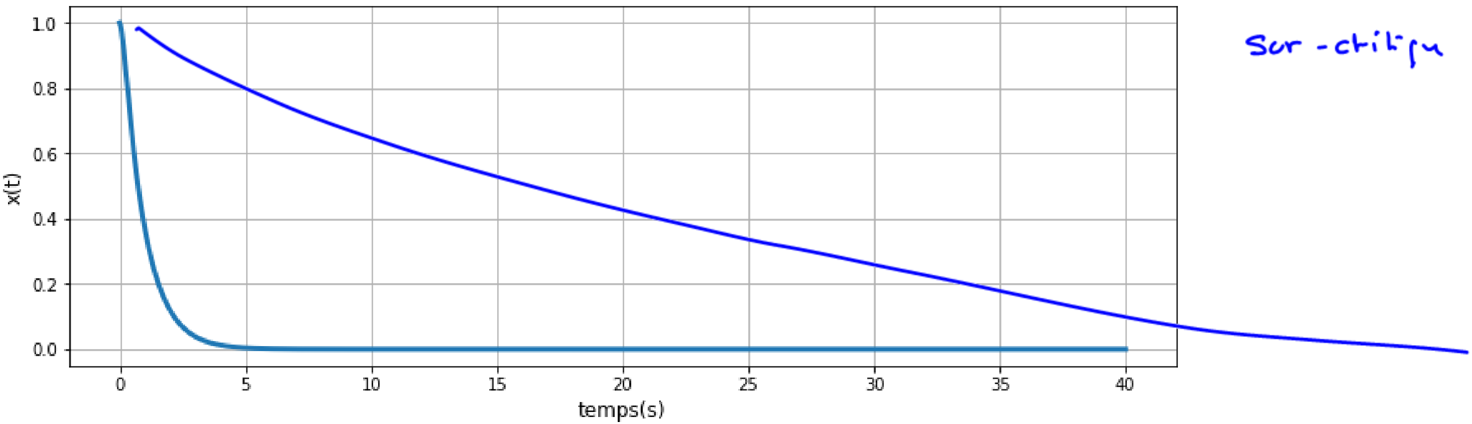
Régime sous-critique

Si $\boxed{\gamma > \Omega_0}$ les solutions sont du type

$$x(t) = Ae^{\overset{<0}{\lambda_1 t}} + Be^{\overset{<0}{\lambda_2 t}}$$

avec λ_1 et λ_2 racines de l'équation du second degré en λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$$



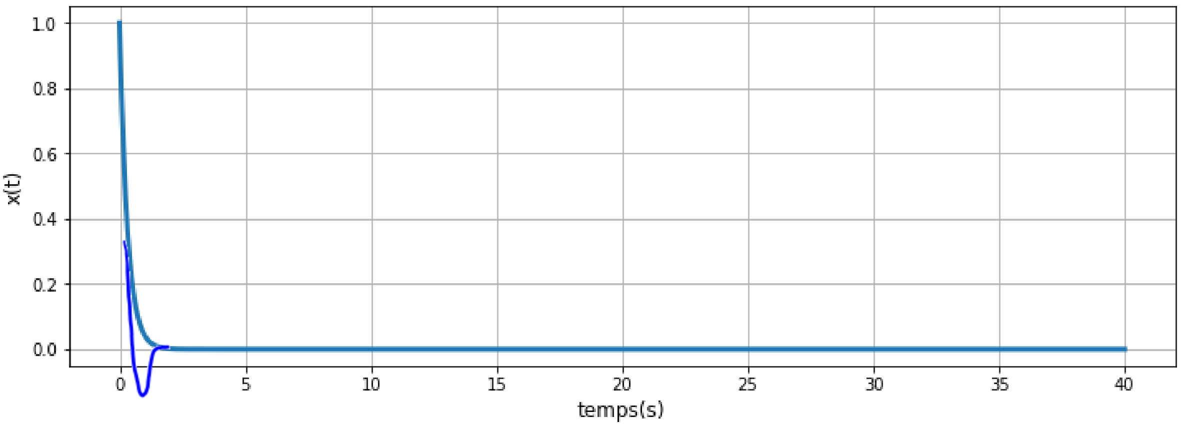
Sur-critique

Si $\boxed{\gamma = \Omega_0}$ les solutions sont du type

$$\boxed{x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}}$$

On remarque que $-\gamma$ est racine double de l'équation du second degré en λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 = 0$$



critique

.

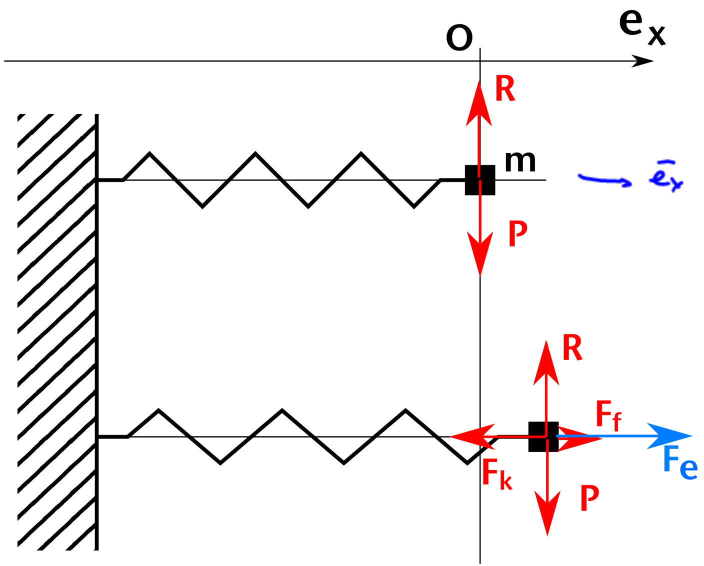
Table des matières

4. Oscillations forcées

On applique au système une force qui a une forme sinusoïdale :

$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$

$\vec{F}_e = F_0 \cos(\omega_e t)\, \vec{e}_x$



$\rightarrow \vec{e}_x$

$x(t) = \dots$

2ème Loi de Newton $\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}$

$$\underbrace{\vec{P} + \vec{R}}_{0} + \vec{F}_k + \vec{F}_f + \vec{F}_e = m\vec{a}$$

$$m\ddot{x} = -kx - b_e\dot{x} + F_0\cos(\omega_e \cdot t)$$

$$\ddot{x} + \frac{b_e}{m}\dot{x} + \frac{kx}{m} = F_0\cos(\omega_e \cdot t)$$

$$2\gamma = \frac{b_e}{m}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = \underbrace{f_0\cos(\omega_e \cdot t)}_{\text{2nd membre}}}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = \underline{f(t)}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode pour résoudre cette équation est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2ème membre (donc avec les constantes d'intégration : $x_2(t)$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode pour résoudre cette équation est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2ème membre (donc avec les constantes d'intégration : $x_2(t)$

2 – **Une** solution particulière de l'équation avec 2ème membre (sans constante d'intégration) : $x_1(t)$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode pour résoudre cette équation est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2ème membre (donc avec les constantes d'intégration : $x_2(t)$

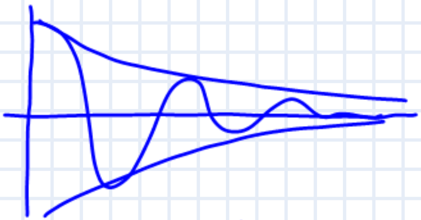
2 – **Une** solution particulière de l'équation avec 2ème membre (sans constante d'intégration) : $x_1(t)$

La solution **générale** de l'équation **avec** second membre sera :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$x_2(t)$ sol. $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$

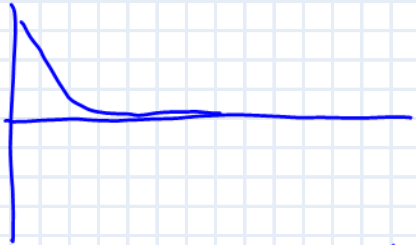
Si $\gamma < \Omega_0$



$x_2(t) = A e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi)$

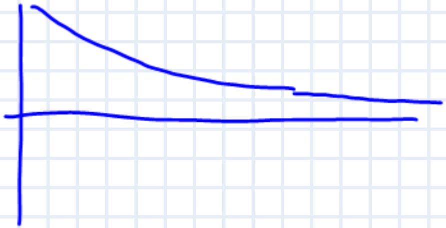
$\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$

Si $\gamma = \Omega_0$



$x_2(t) = (A + B\cdot t)\, e^{-\gamma t}$

$\gamma > \Omega_0$



$x_2(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t}$

λ_1, λ_2 sol. de l'éq. caractéristique

$x_2(t) = 0 \qquad t \to \infty$

$t \to \infty$

$x(t) = \underline{x_1(t)} + \underline{x_2(t)}$

?

$x(t) = x_1(t)$

En observant le système (expérience) sur des échelles de temps longues, nous pouvons déduire les propriétés de $x(t)$ et donc de $x_1(t)$.

Caractéristiques de $x_1(t)$:

- $x_1(t)$ oscillatoire de pulsation ω_e — $x_1(t) \sim \cos(\omega_e \cdot t)$, $\sin(\omega_e \cdot t)$
- l'amplitude de $x_1(t)$ dépend de ω_e — $x_1(t) \sim \cos(\omega_e t) \cdot A(\omega_e)$
- $x_1(t)$ est déphasé par rapport à l'exitation — $x_1(t) \sim \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$
- le déphasage de $x_1(t)$ dépend de ω_e

$$x_1(t) = A(\omega_e) \cos(\omega_e \cdot t + \varphi(\omega_e))$$

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

et qu'elle est solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0\cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

et qu'elle est solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0\cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

Passons en notation complexe

$$ae^{i\theta} = a\cos\theta + ia\sin\theta$$

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

$\cos(\omega t) \sim e^{i\omega t}$

et qu'elle est solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0\cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

$z = a + ib$

Passons en notation complexe

$$ae^{i\theta} = a\cos\theta + ia\sin\theta$$

En notation complexe, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\underline{x}} + 2\gamma\dot{\underline{x}} + \Omega_0^2\underline{x} = f_0\, e^{i\omega_e t}$$

et l'équation pariculière :

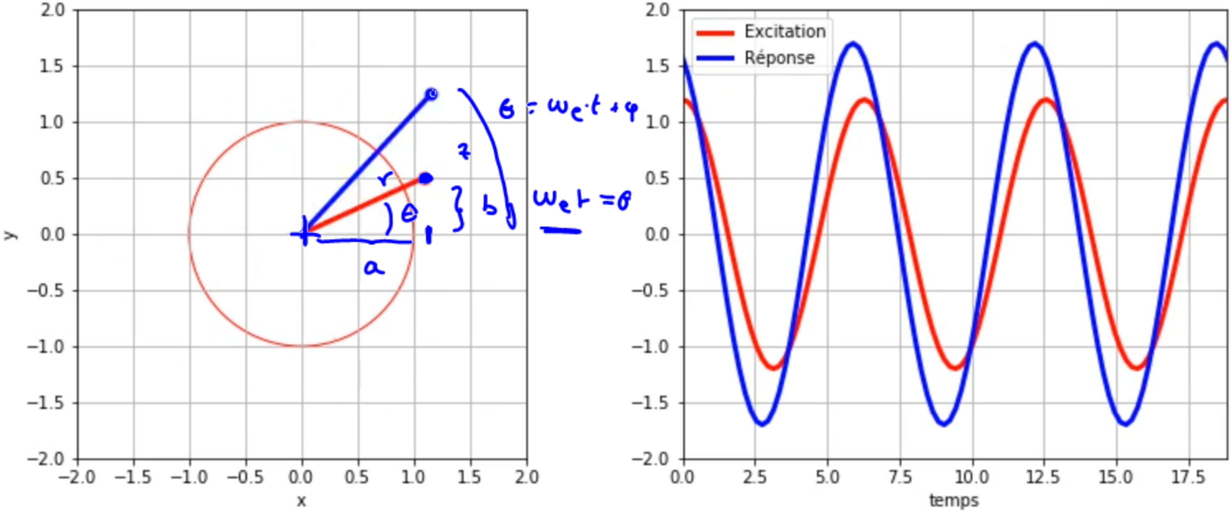
$$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e)e^{i(\omega_e t + \varphi)}$$

Euler

$$z = a + ib = r\cos\theta + i r \sin\theta$$
$$= r\,[\cos\theta + i \sin\theta] = re^{i\theta}$$

excitation $\sim e^{i\omega_e t}$

réponse $\sim e^{i(\omega_e t + \varphi)}$



$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e)e^{i(\omega_e t+\varphi)}$ solution de : $\underline{\ddot{x}} + 2\gamma\underline{\dot{x}} + \Omega_0^2\underline{x} = f_0\, e^{i\omega_e t}$? ?

$$x_1(t) = A(\omega_e)\, e^{i(\omega_e t+\varphi)} = \underbrace{A(\omega_e) e^{i\varphi}}_{x_0} e^{i\omega_e t} = x_0\, e^{i\omega_e t}$$

$$\boxed{x_0 = A(\omega_e) e^{i\varphi}}$$

$$\dot{x}_1(t) = x_0\, i\omega_e\, e^{i\omega_e t}$$

$$\ddot{x}_1(t) = -x_0\,\omega_e^2\, e^{i\omega_e t}$$

$$-x_0\omega_e^2\,\cancel{e^{i\omega_e t}} + i2\gamma x_0\omega_e\,\cancel{e^{i\omega_e t}} + \Omega_0^2 x_0\,\cancel{e^{i\omega_e t}} = f_0\,\cancel{e^{i\omega_e t}}$$

$$x_0\left(-\omega_e^2 + i2\gamma\omega_e + \Omega_0^2\right) = f_0$$

$$\boxed{x_0 = \frac{f_0}{-(\omega_e^2 - \Omega_0^2) + i2\gamma\omega_e}}$$

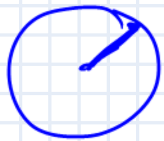
$A = ?$ ✓

$\varphi = ?$

$$x_0 = \frac{f_0}{-(\omega_e^2 - \Omega_0^2) + i\,2\gamma\,\omega_e} = A(\omega_e)\,e^{i\varphi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -(\omega_e^2 - \Omega_0^2) \\ b &= 2\gamma\,\omega_e \end{aligned}}$$

$$x_0 = \frac{f_0}{a + ib}$$



① norme $|x_0| = A$

$$A = \frac{|f_0|}{|a+ib|} = \frac{f_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{A(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}}$$

(2) $\varphi = ?$

$$x_0 = A e^{i\varphi} \qquad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$e^{i\varphi} = \frac{x_0}{A} = \frac{x_0}{|x_0|} = \frac{f_0}{a+bi} \left| \frac{a+bi}{f_0} \right| = \frac{\cancel{f_0}}{a+bi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cancel{f_0}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+bi}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}(a-bi)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} a - i \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} \cdot b$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

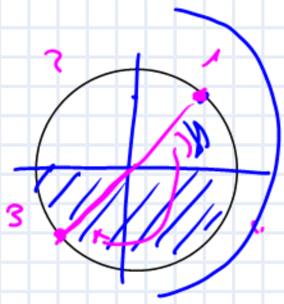
$$e^{i\varphi} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -(\omega_e^2-\Omega_0^2) \\ b &= 2\gamma\omega_e \end{aligned}}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-(\omega_e^2-\Omega_0^2)}{\sqrt{(\omega_e^2-\Omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_e^2}}}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-2\gamma\omega_e}{\sqrt{(\omega_e^2-\Omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_e^2}}}$$



$\varphi \in [-\pi, 0]$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2-\Omega_0^2}$$

si $\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2-\Omega_0^2} = \frac{b}{a} > 0$ (cadran 3) $\qquad \varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2-\Omega_0^2}\right) - \pi$

si $\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2-\Omega_0^2} < 0 \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2-\Omega_0^2}\right)$

Au final, de retour dans le monde réel :

$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$ est bien une solution particulière, avec

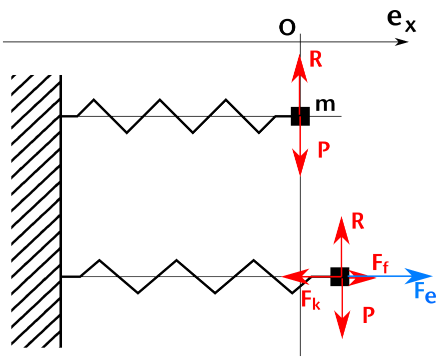
$$A(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\Omega_0^2 - \omega_e^2)}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \quad \sin\varphi = \frac{-2\gamma\omega_e}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega_2}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad \text{avec,} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

Résumé :

On applique au système de masse m une force qui a une forme sinusoïdale :



$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = (F_0/m)\cos(\omega_e t)$$

La solution générale est la somme de x_1 et x_2

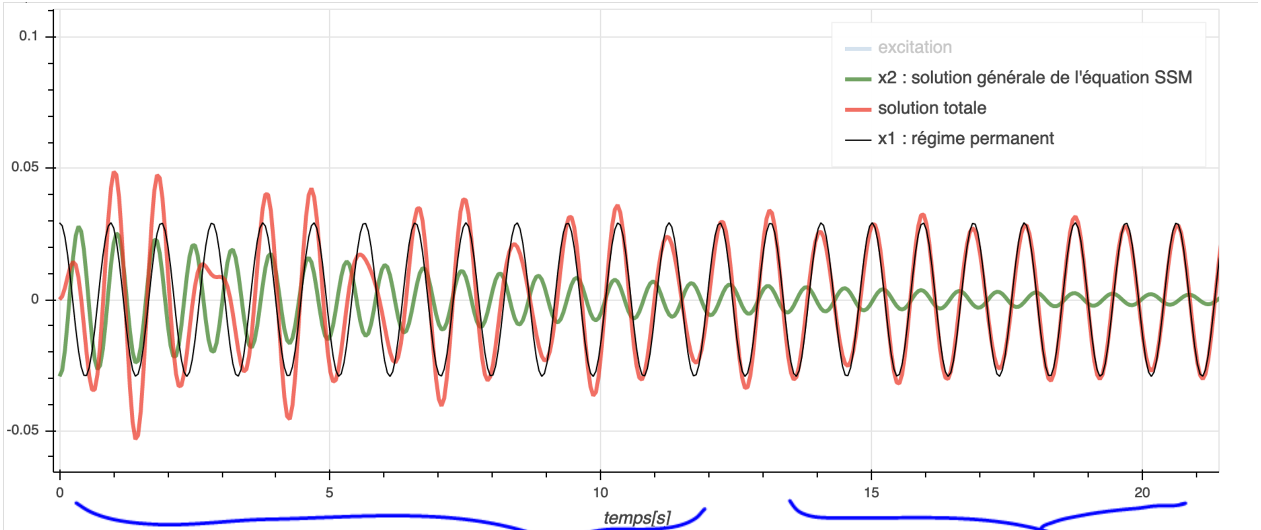
x_2 solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ **tend toujours vers 0 !**

en régime permanent il reste $x_1(t) = A\cos(\omega_e t + \varphi)$

$A(\omega_e)$
$\varphi(\omega_e)$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \qquad \tan(\varphi) = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

Etablissement du régime permanent

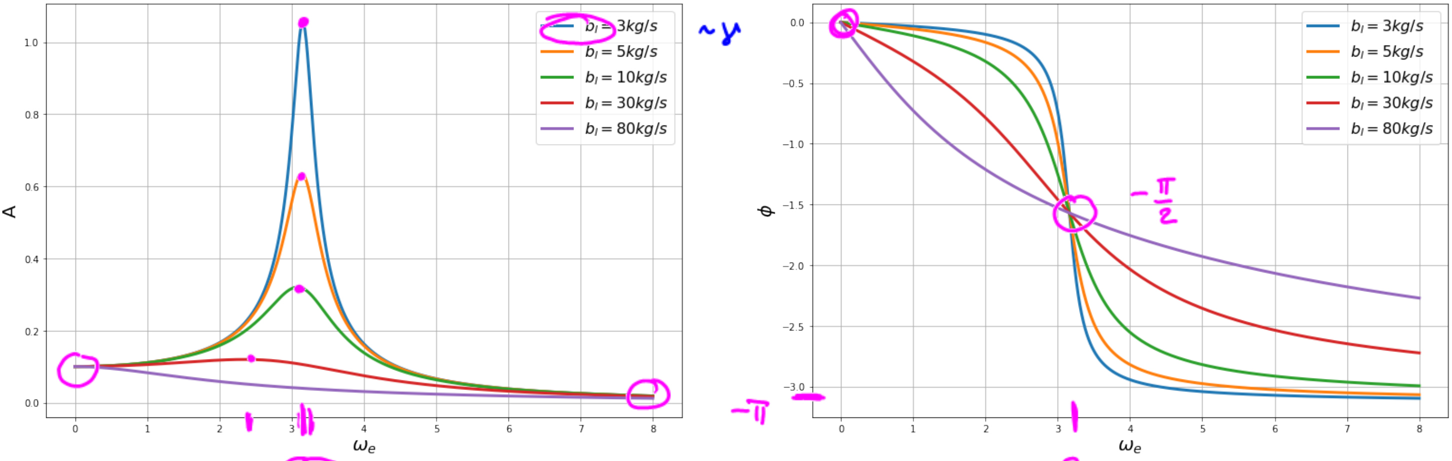


transitoire

permanent

$x_1 , x_2 \neq c$

Analyse du régime permanent $x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$



ω_{res}

Amplitude et déphasage en fontion de ω_e pour différents frottements.

Ω_0

Analyse de la fonction $A(\omega_e)$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{g(\omega_e)}}$$

$$g(\omega_e) = (\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2$$

$$\frac{d}{d\omega_e} g(\omega_e) = 2(\omega_e^2 - \Omega_0^2)\, 2\omega_e + 8\gamma^2\omega_e \stackrel{?}{=} 0$$

$$= 4\omega_e \left[\omega_e^2 - \Omega_0^2 + 2\gamma^2 \right] \stackrel{?}{=} 0$$

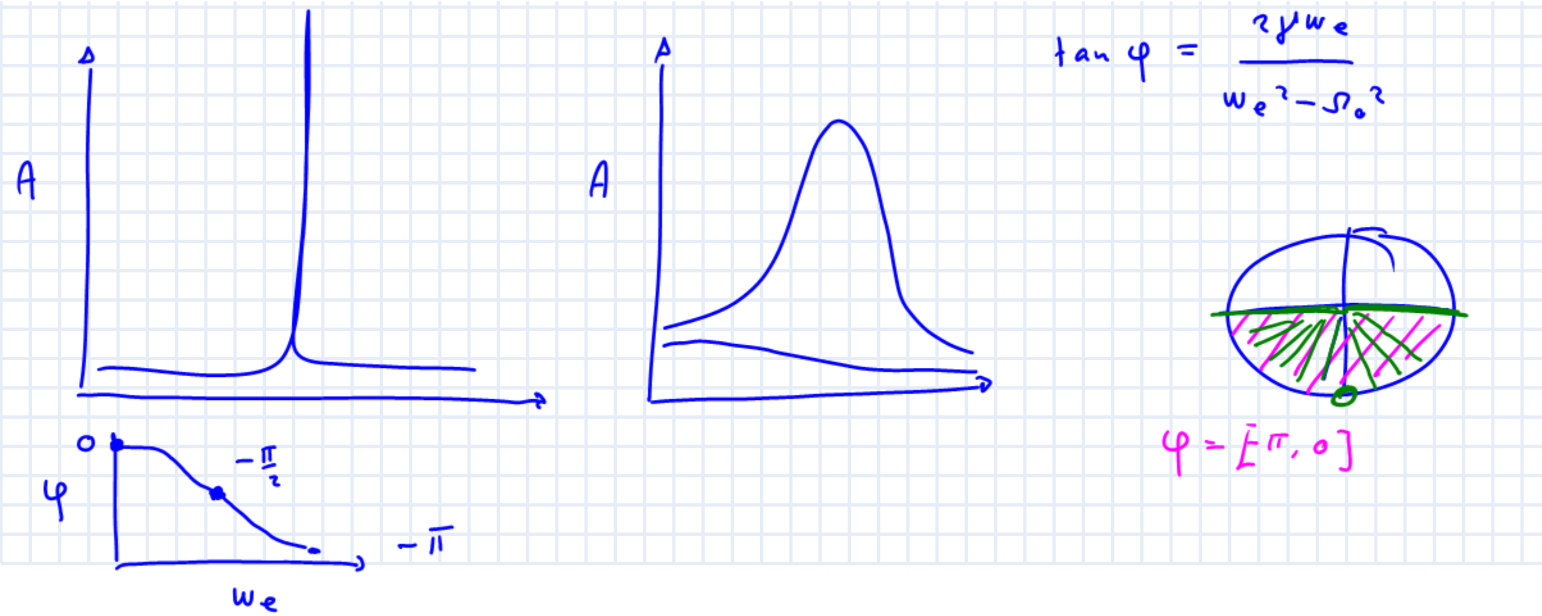
① $\omega_e = 0$

② $\omega_e^2 = \Omega_0^2 - 2\gamma^2$

$$\omega_e = \pm\sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

1) $\Omega_0^2 > 2\gamma^2$ → 1 sol réelle $\omega_e = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$

2) $\Omega_0^2 < 2\gamma^2$ → 0 solution



$$A(\omega_e) = A_{\max} \quad \text{pour} \quad \omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Si $\gamma^2 > \Omega_0^2/2$ il n'y a pas de résonance.

Résumé sur les pulsations :

Ω_0 est la **pulsation propre** du système, soit la pulsation des oscillation si il n'y a ni amortissement ni forçage.

$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$ est la **pseudo-pulsation** du système avec amortissement, mais non forcé, quand l'amortissement est sous-critique.

ω_e est la **pulsation d'excitation** : une pulsation *imposée* par l'utilisateur dans le cas d'un osclliateur forcé.

$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$ est la **pulsation de résonnance** : une valeur particulière de ω_e pour laquelle la réponse du système a une amplitude maximale en régime permanent.

Période = 2π / pulsation   et   fréquence = 1/période

Facteur de qualité

On définit le *facteur de qualité*

$$Q = \frac{\Omega_0}{2\gamma}$$

Une analyse dimensionnelle montre que Q est sans dimension.

$$A(\omega_e) = \frac{A(0)Q}{\sqrt{Q^2\left(\frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}}}$$

Amplitude maximale $A_{\mathbf{max}}$

$$A_{\mathrm{max}} = A(\omega_{\mathrm{res}}) = \frac{A(0)\,Q^2}{\sqrt{Q^2 - 1/4}}$$

Si $Q \gg 1$, $A_{\mathrm{max}} \simeq A(0)\,Q$

Plus Q est grand plus A_{max} est grand.

Q donne directement une mesure de la "qualité" de la résonance.