

VIII - Oscillateur harmonique

Dr. Yves Revaz

2025



Plan du cours

- I - Cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
- V - Forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - Application du solide indéformable

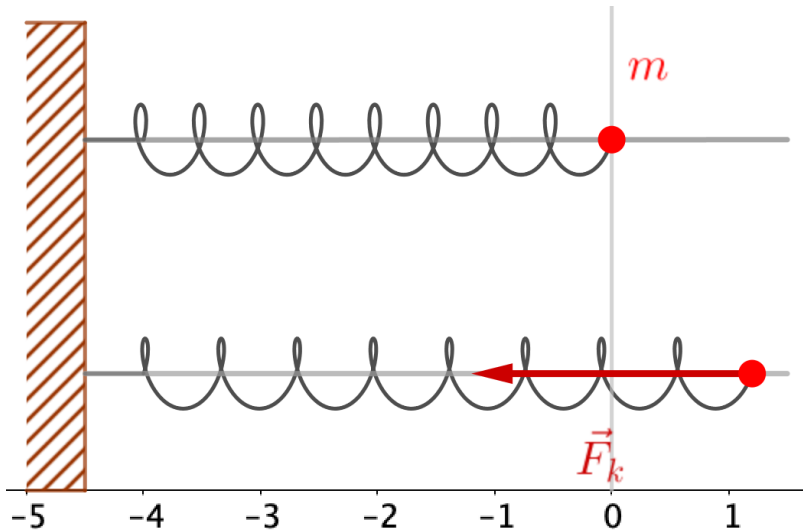
Table des matières

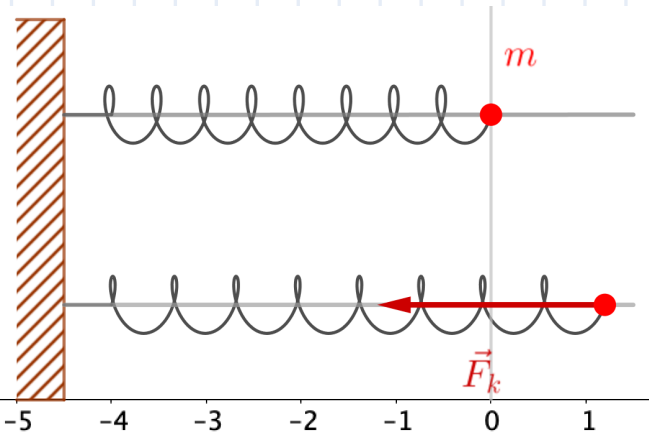
1. Oscillations libres non amorties
2. Oscillateurs non amortis et énergie
3. Oscillations amorties
4. Oscillations forcées

1. Oscillations libres non amorties

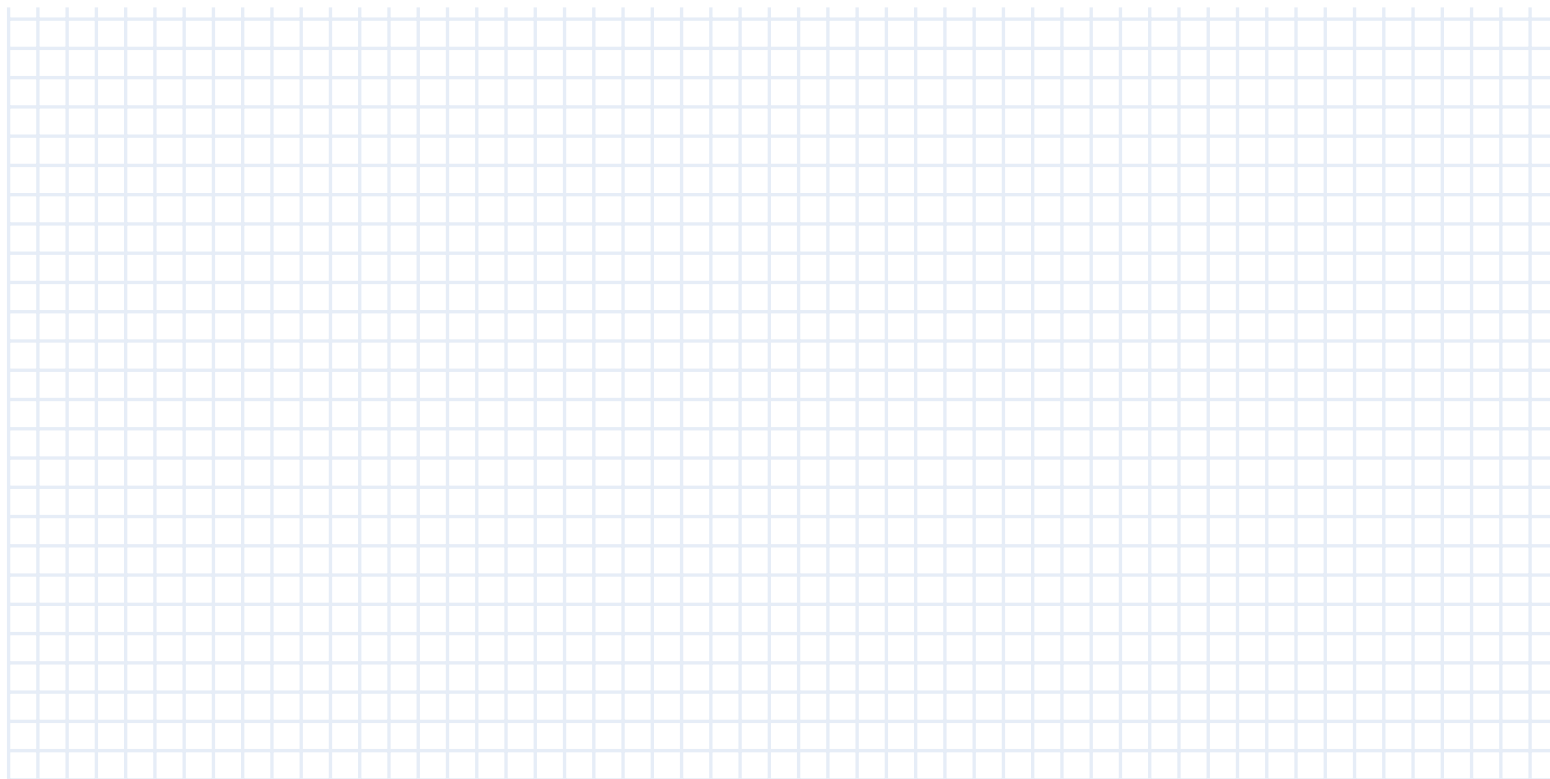
Une masse m **glisse sans frottements** sur un axe horizontal. Elle est retenue par un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 fixé à son autre extrémité.

On tire la masse vers la droite et à $t = 0$ on la lâche sans vitesse initiale.



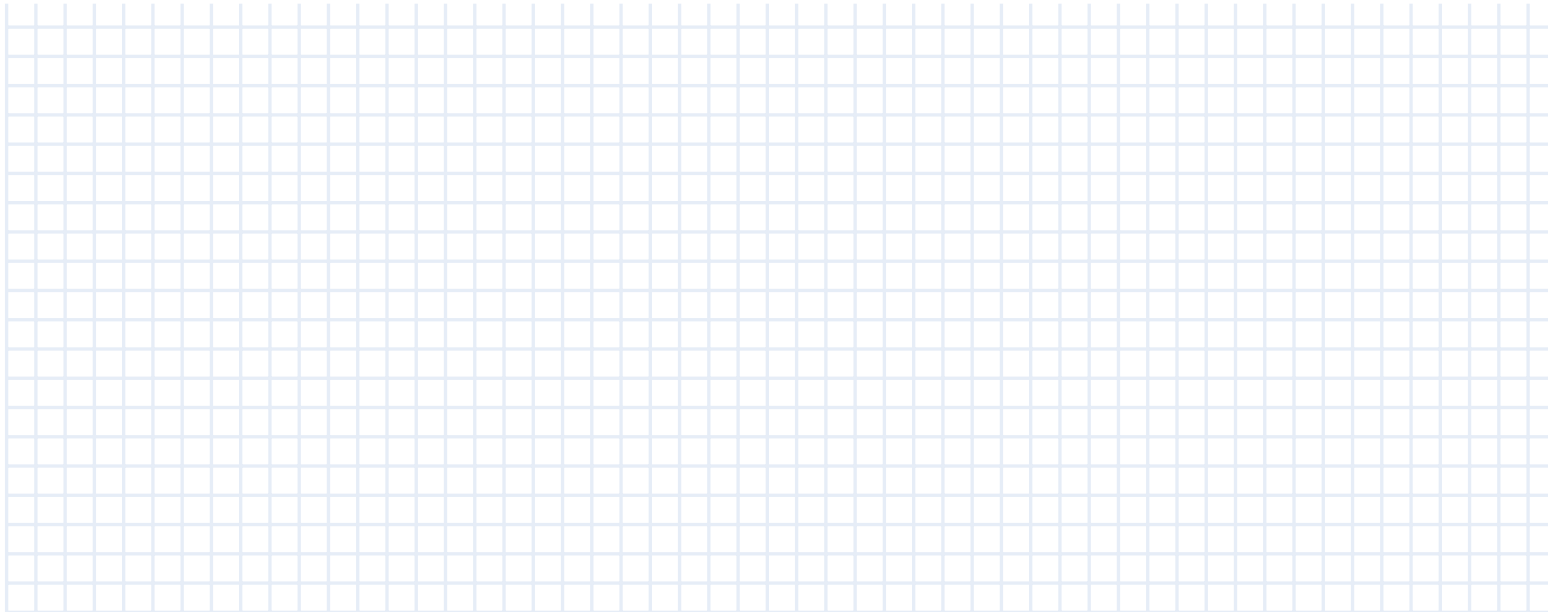


Equation différentielles de type : $\ddot{x}(t) + \Omega_0^2 x(t) = 0$

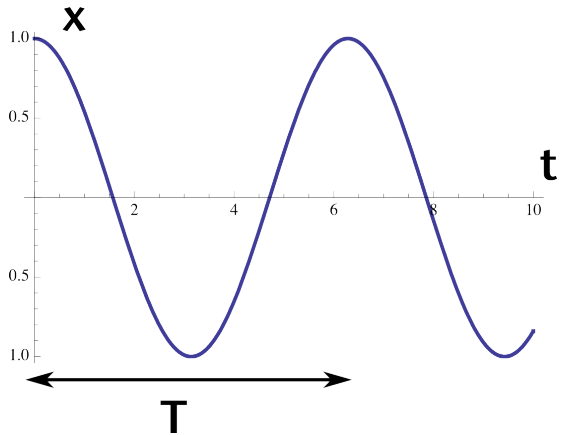


Avec les conditions initiales

$$x(t = 0) = x_0 \quad \dot{x}(t = 0) = 0$$



Position en fonction du temps



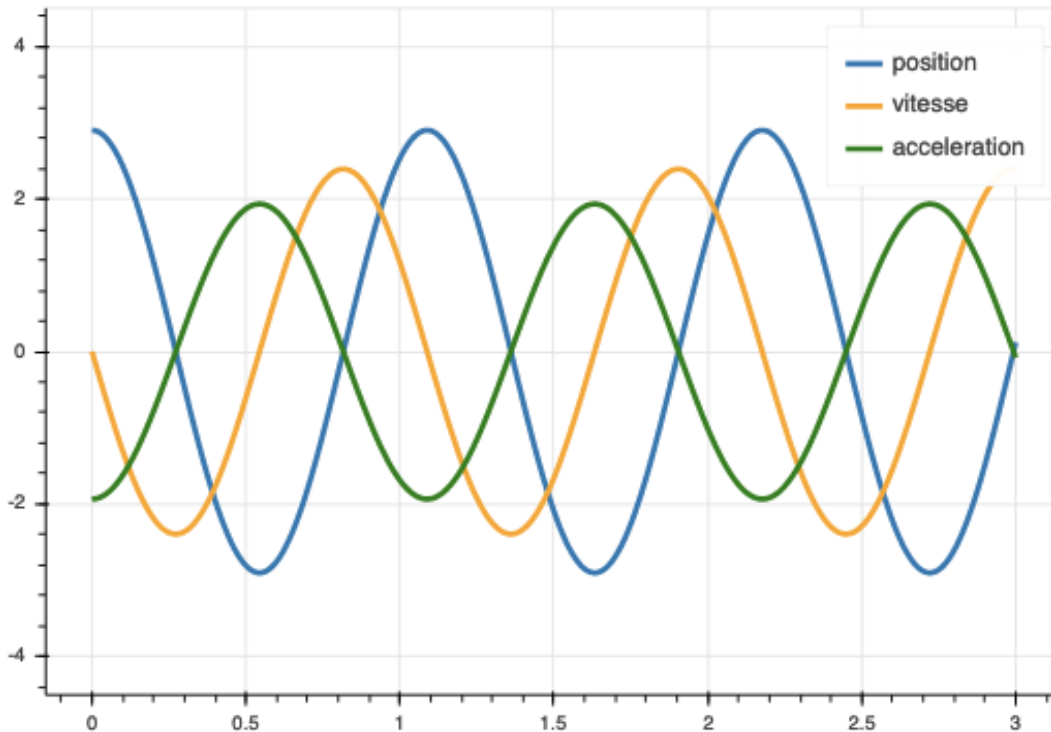
T période des oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

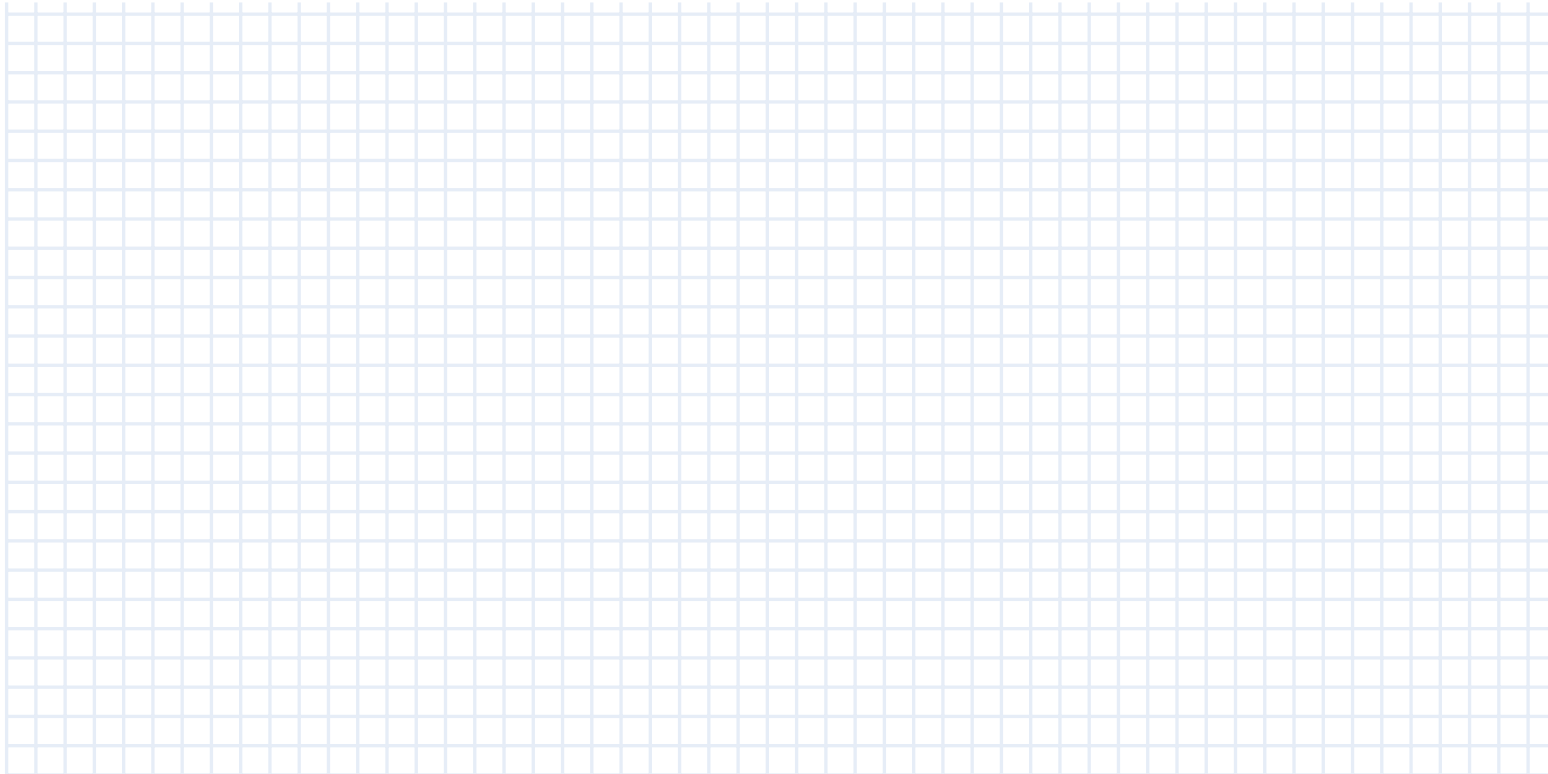
T indépendant de x_0 . Oscillateur harmonique.

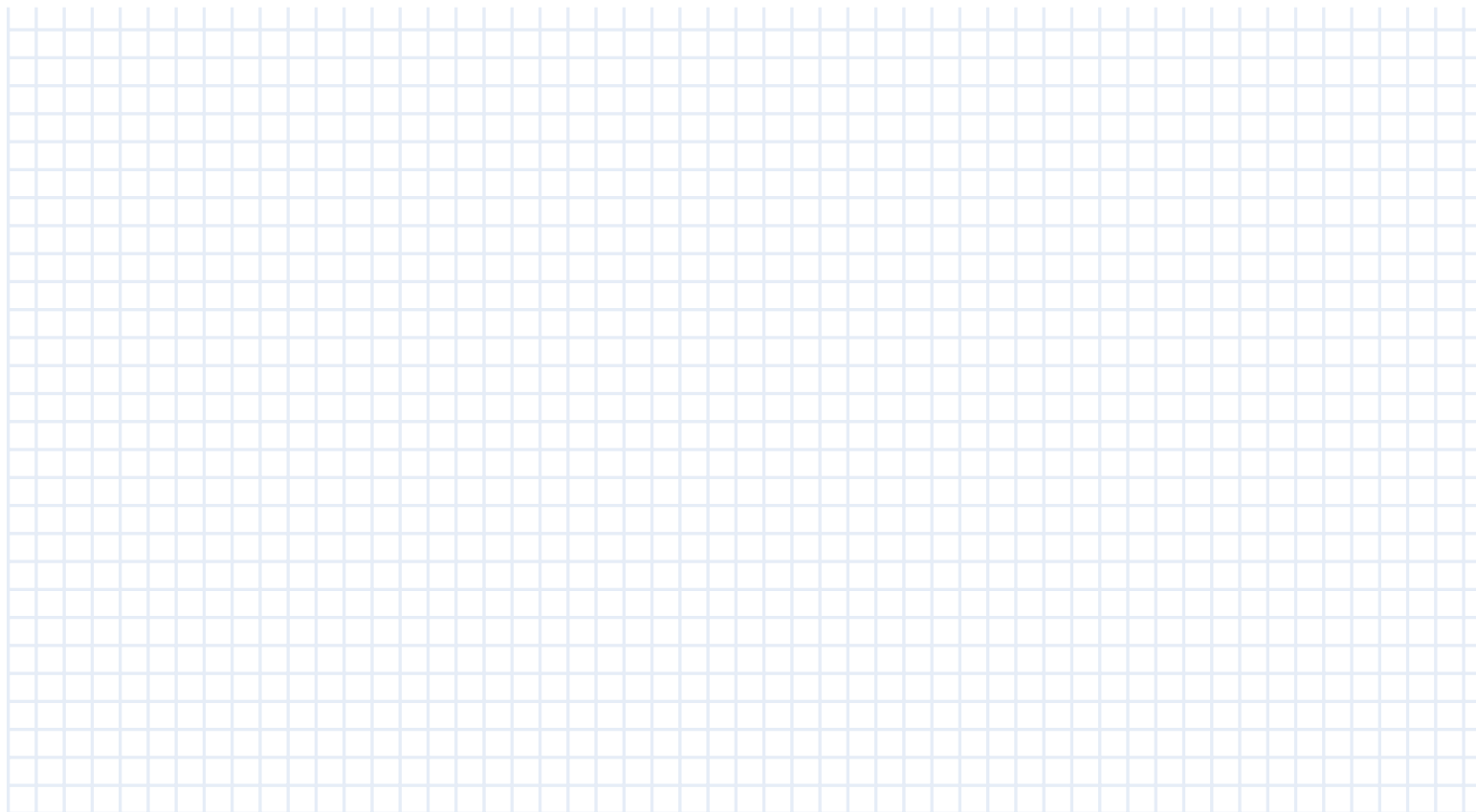
Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.

Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.



Autre exemple d'oscillateur : le pendule simple





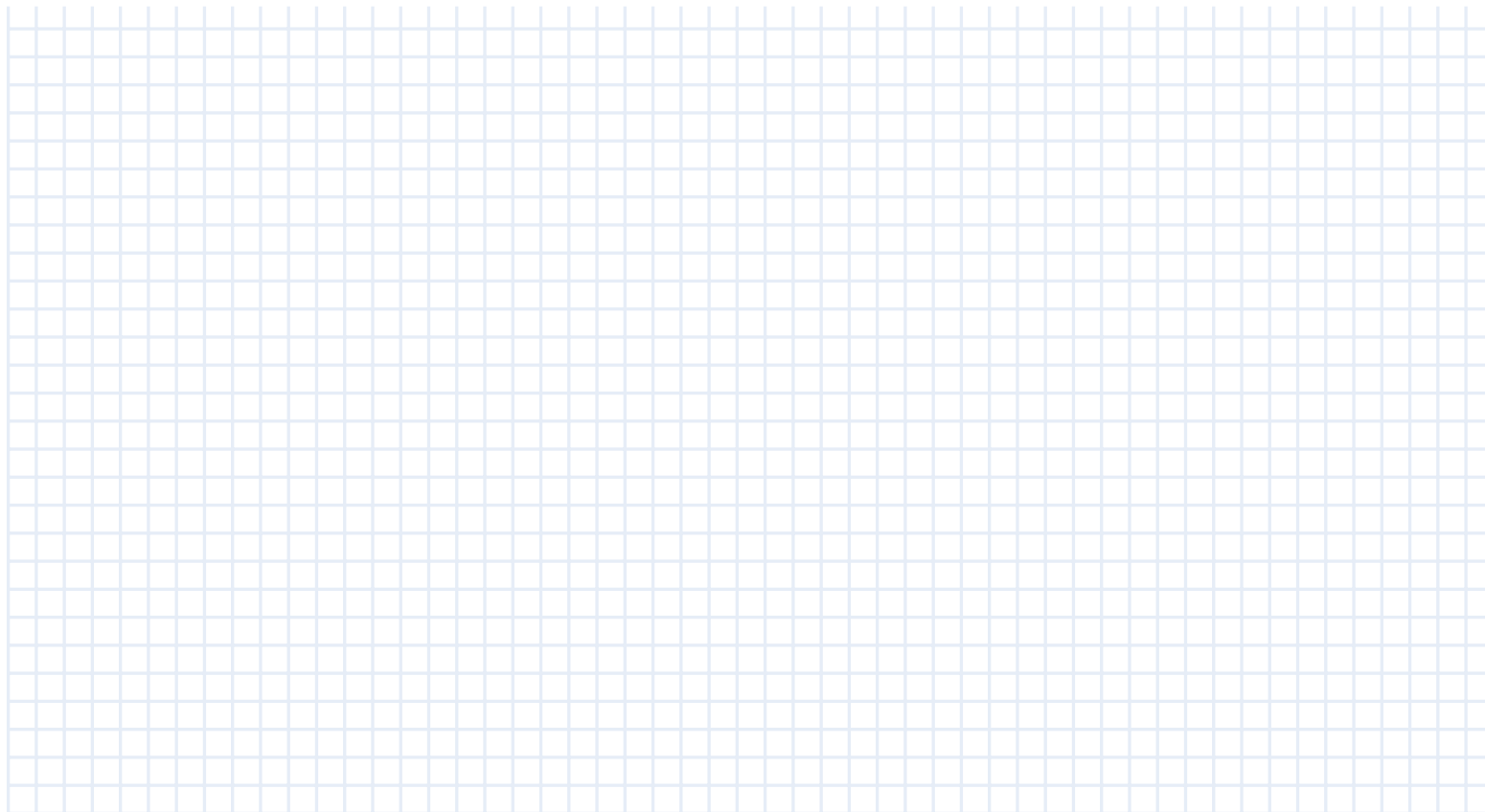
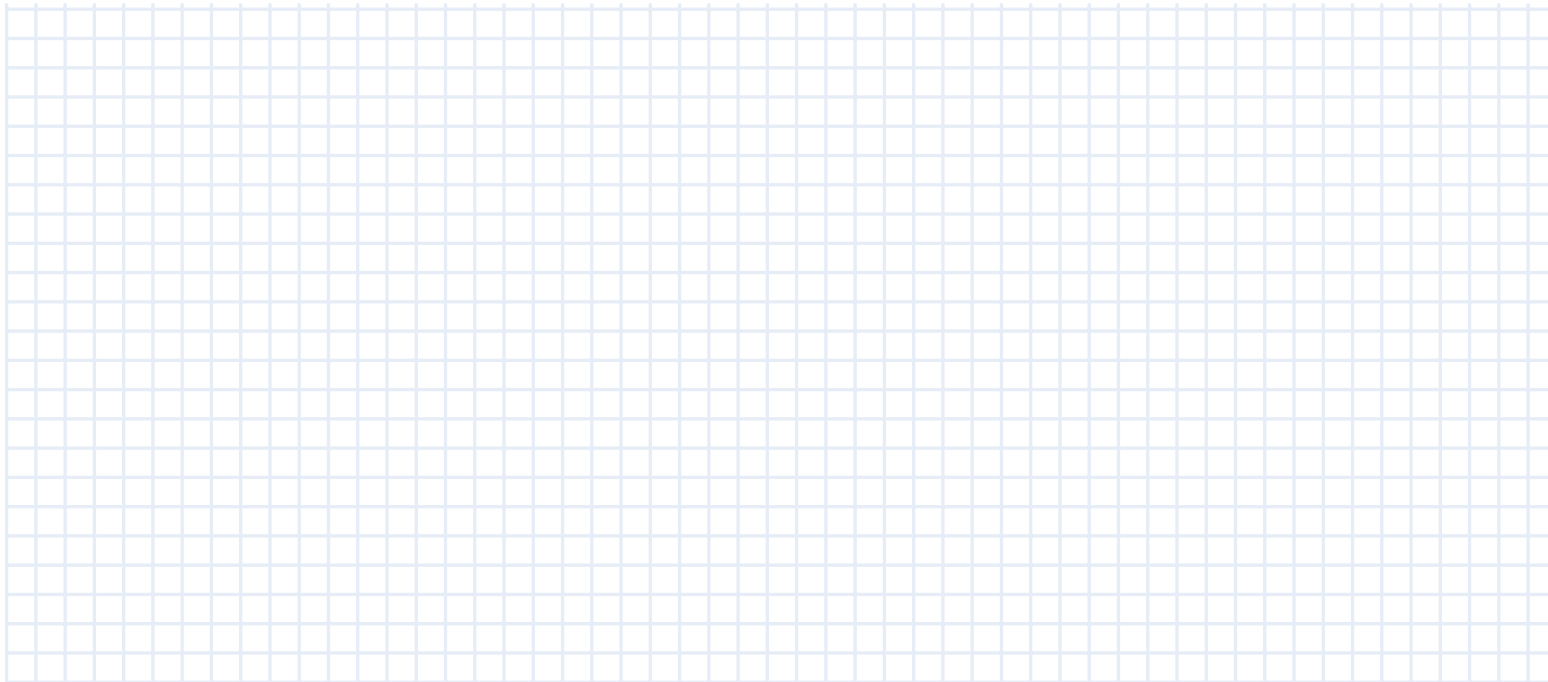


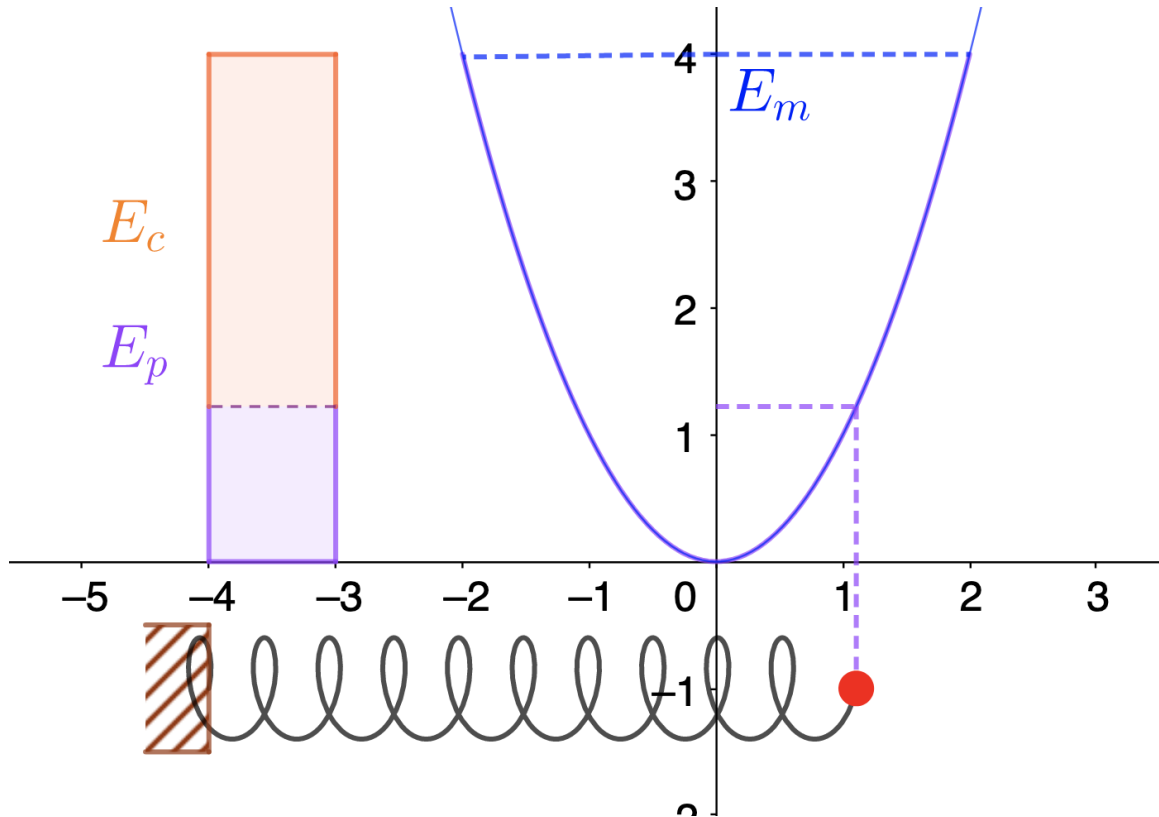
Table des matières

1. Oscillations libres non amorties
2. Oscillateurs non amortis et énergie
3. Oscillations amorties
4. Oscillations forcées

2. Oscillateurs non amortis et énergie

Cas de l'oscillateur harmonique avec un ressort





Oscillateur quelconque

Cas à 1 dimension, pour une force qui dérive d'un potentiel :

$$F = - \frac{dE_p}{dx}$$

$$m\ddot{x} = - \frac{dE_p}{dx}$$

C'est une autre moyen d'obtenir l'équation différentielle.

Pour avoir des oscillations, il faut être autour d'un *minimum* de E_p .

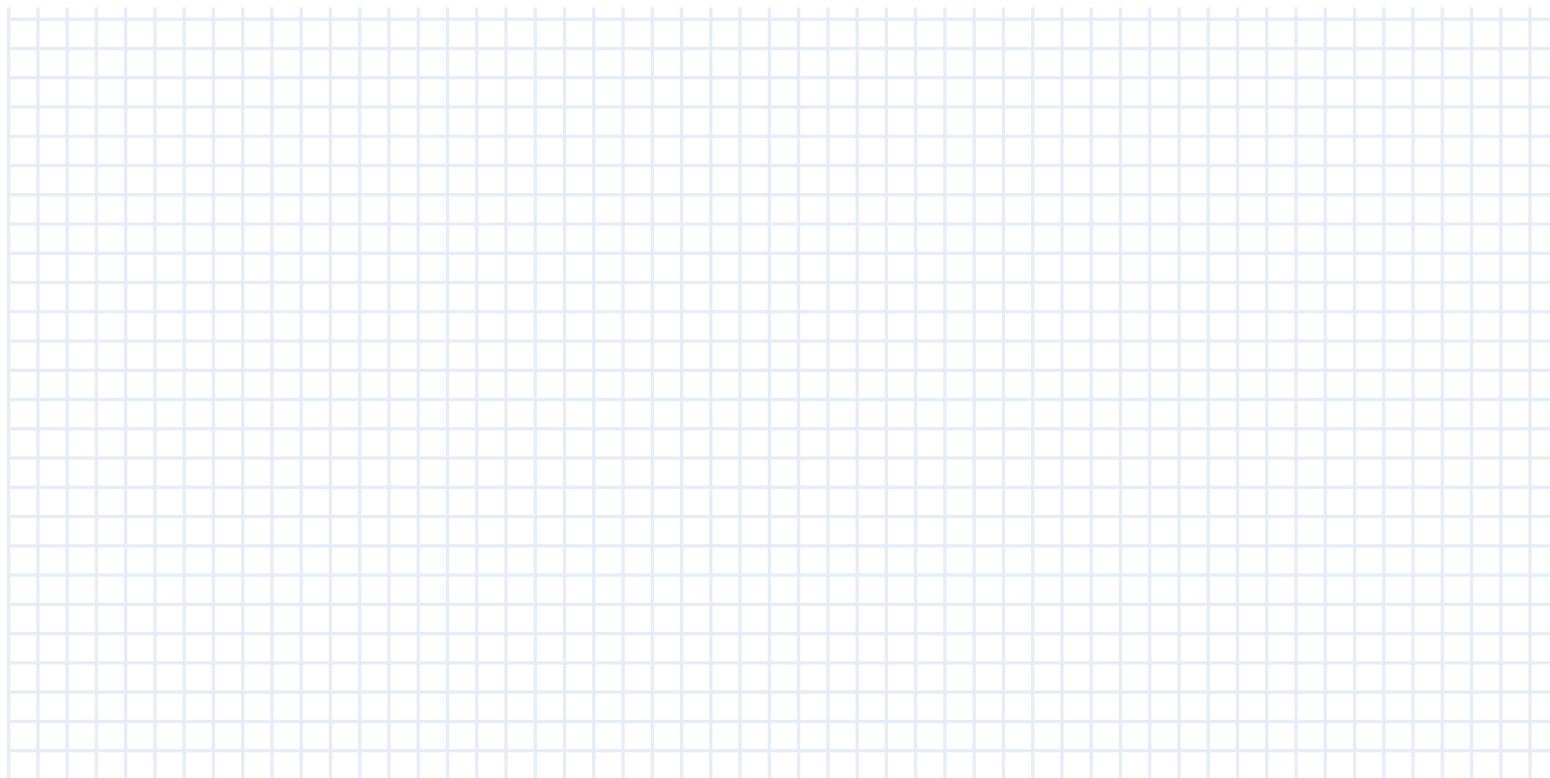
Oscillateurs harmoniques

Pour que l'oscillateur soit **harmonique**, il faut et il suffit que :

$$E_p = A(x - x_0)^2 + E_{p,0}$$

avec A une constante positive (potentiel quadratique).

Exemple : pendule simple



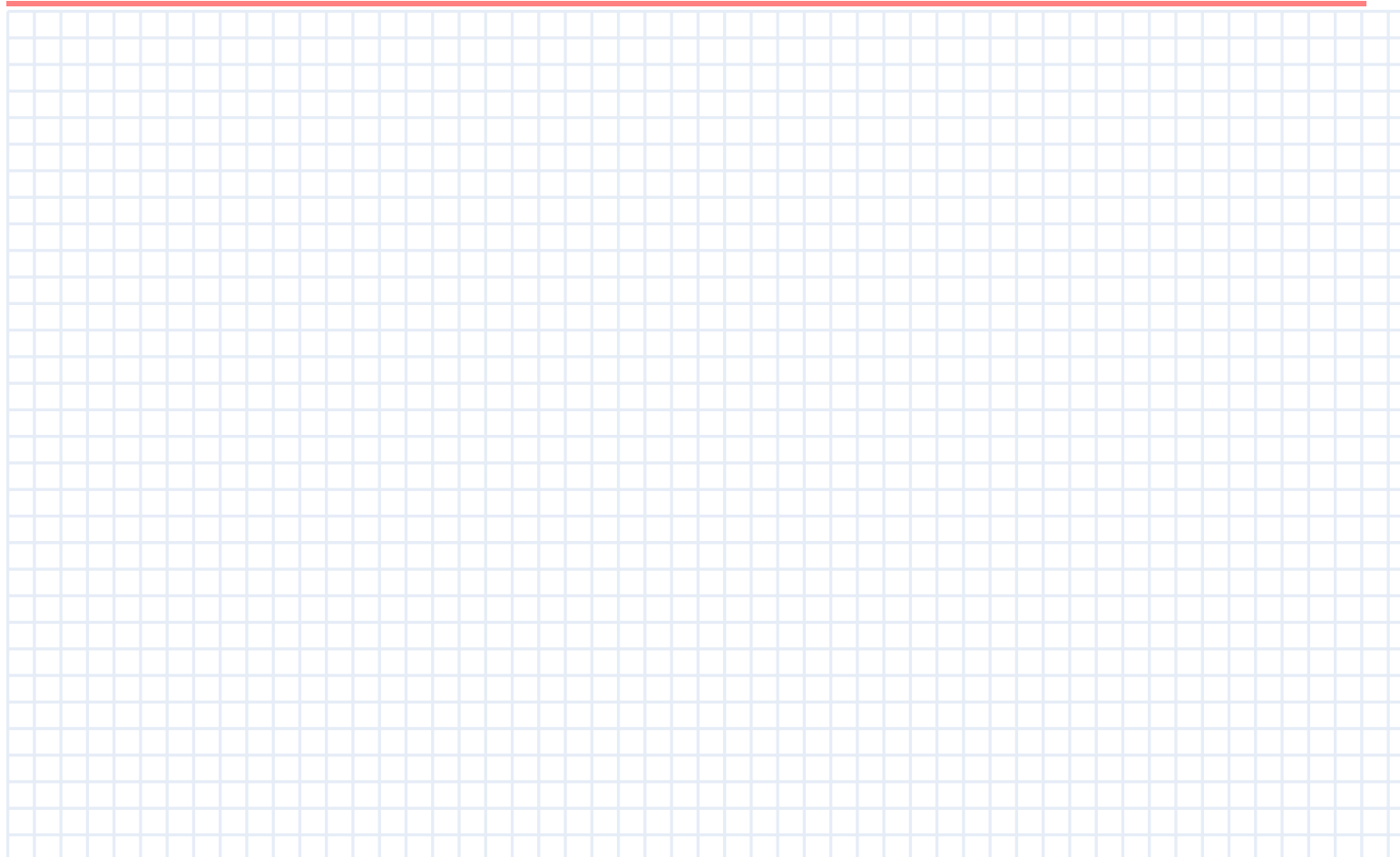
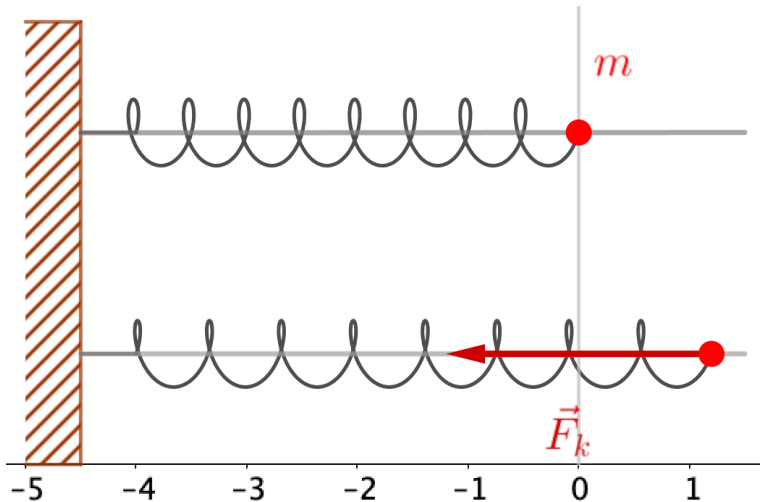


Table des matières

1. Oscillations libres non amorties
2. Oscillateurs non amortis et énergie
3. Oscillations amorties
4. Oscillations forcées

3. Oscillations amorties

On considère un oscillateur harmonique, **qui subit un frottement visqueux** en régime laminaire.

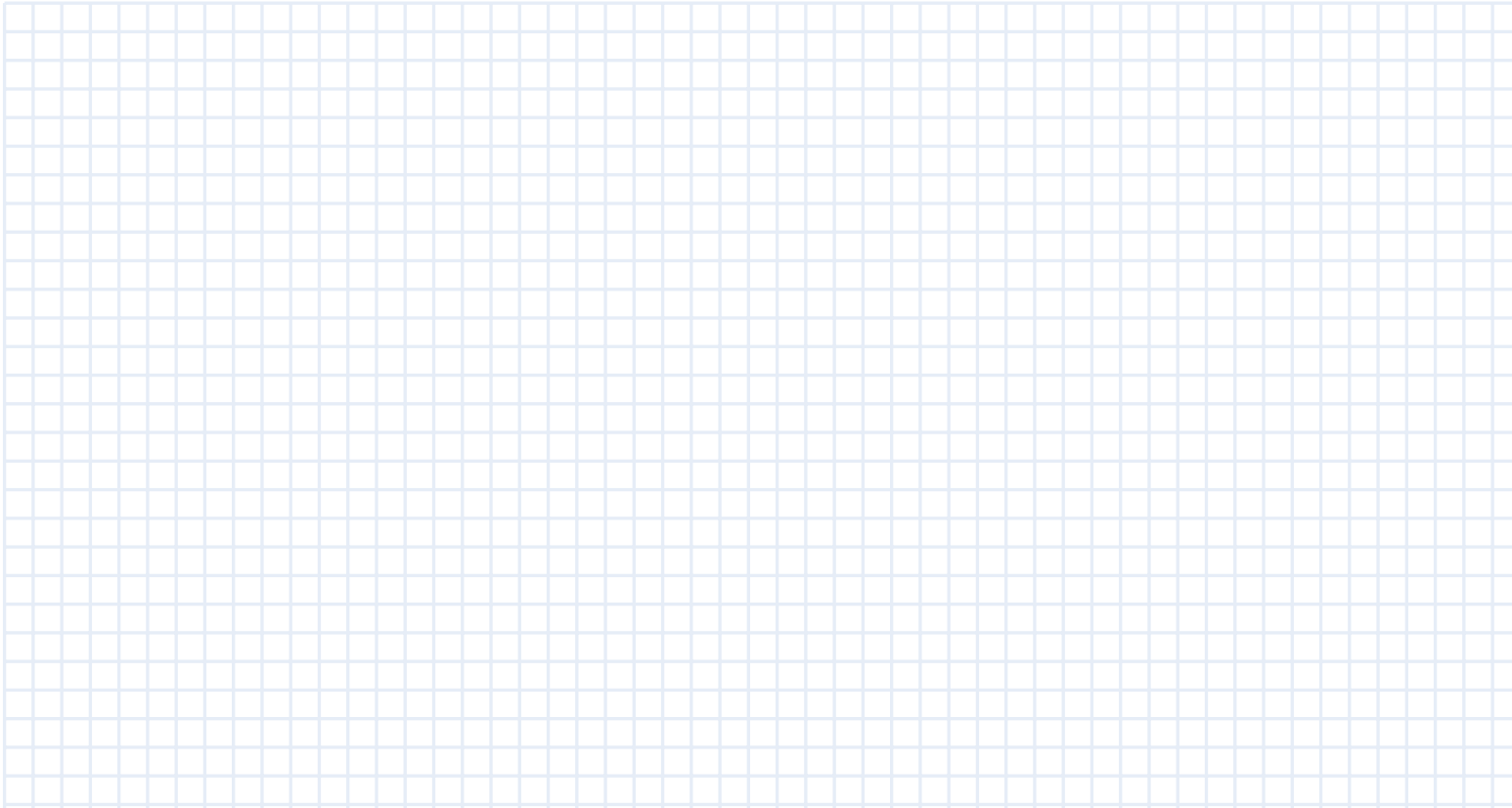


Force de frottement visqueux

$$\vec{F}_f = -b_l \vec{v}$$

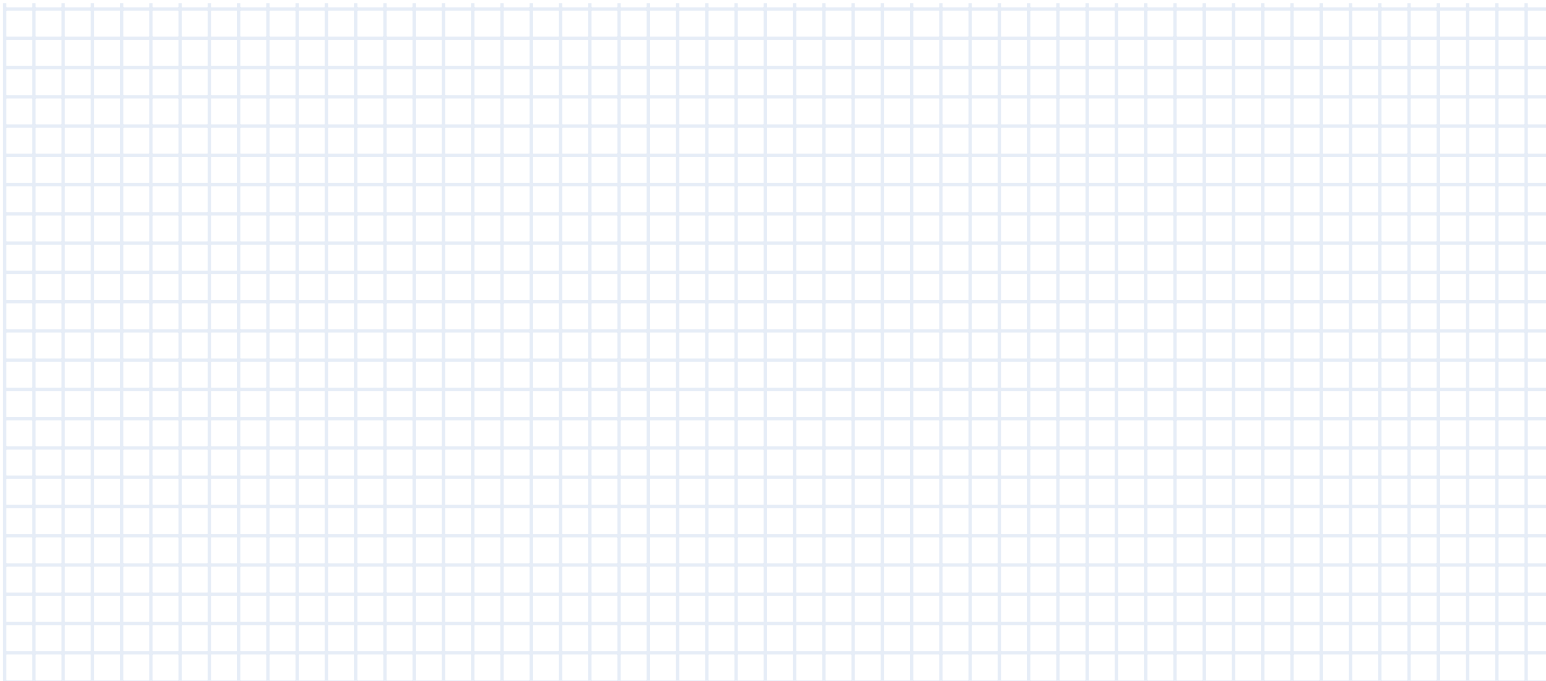
avec \vec{v} vitesse.

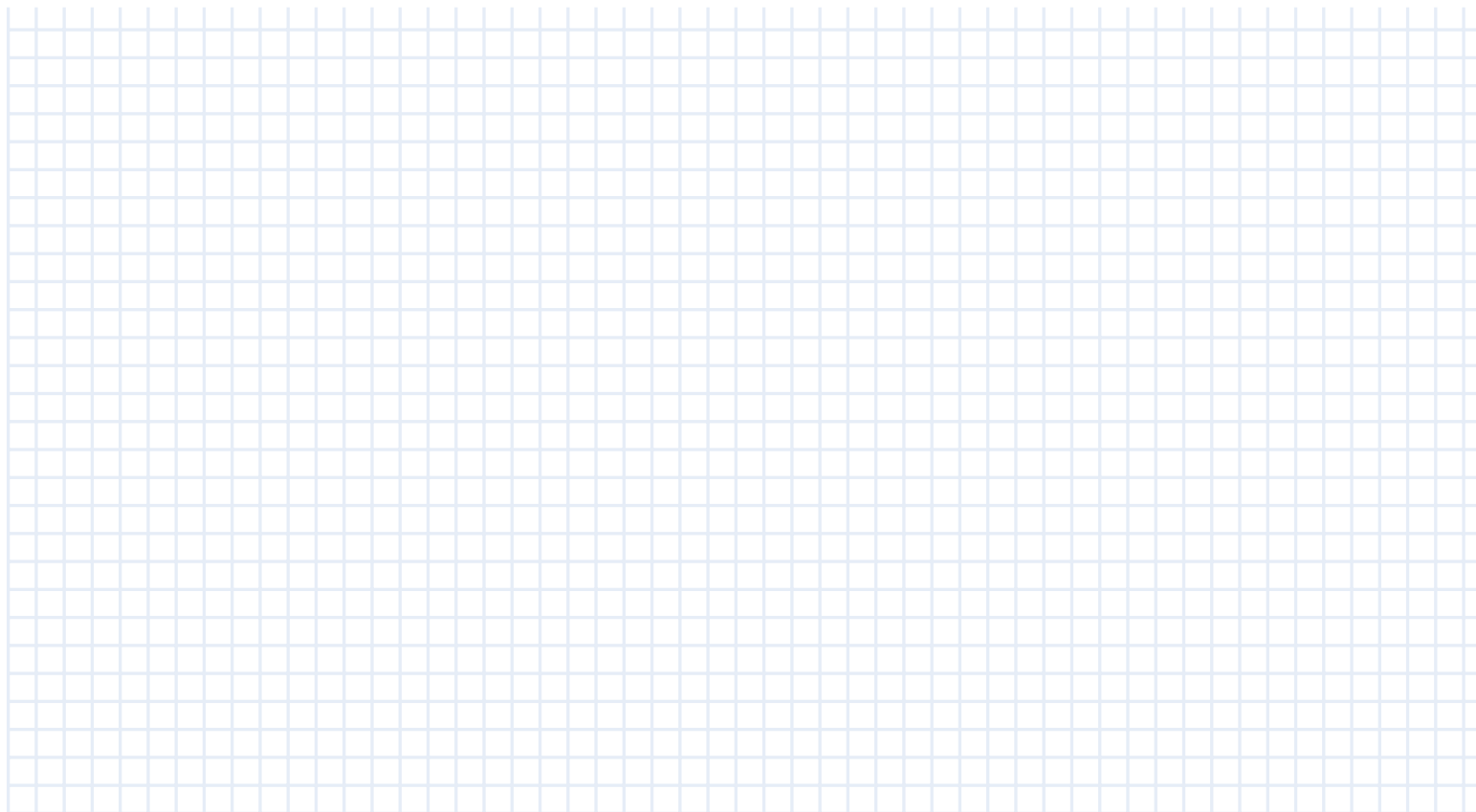
On cherche $x(t)$:

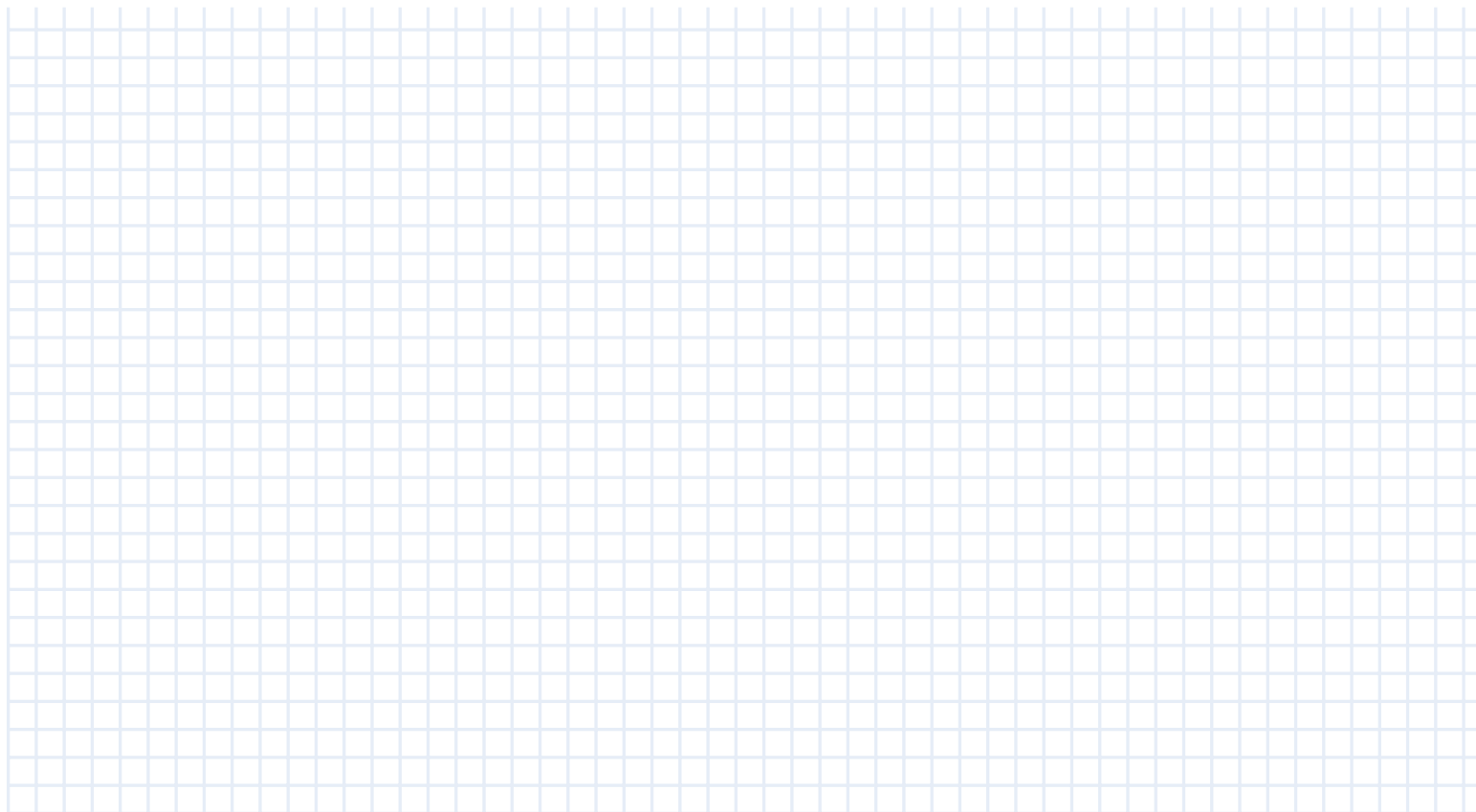


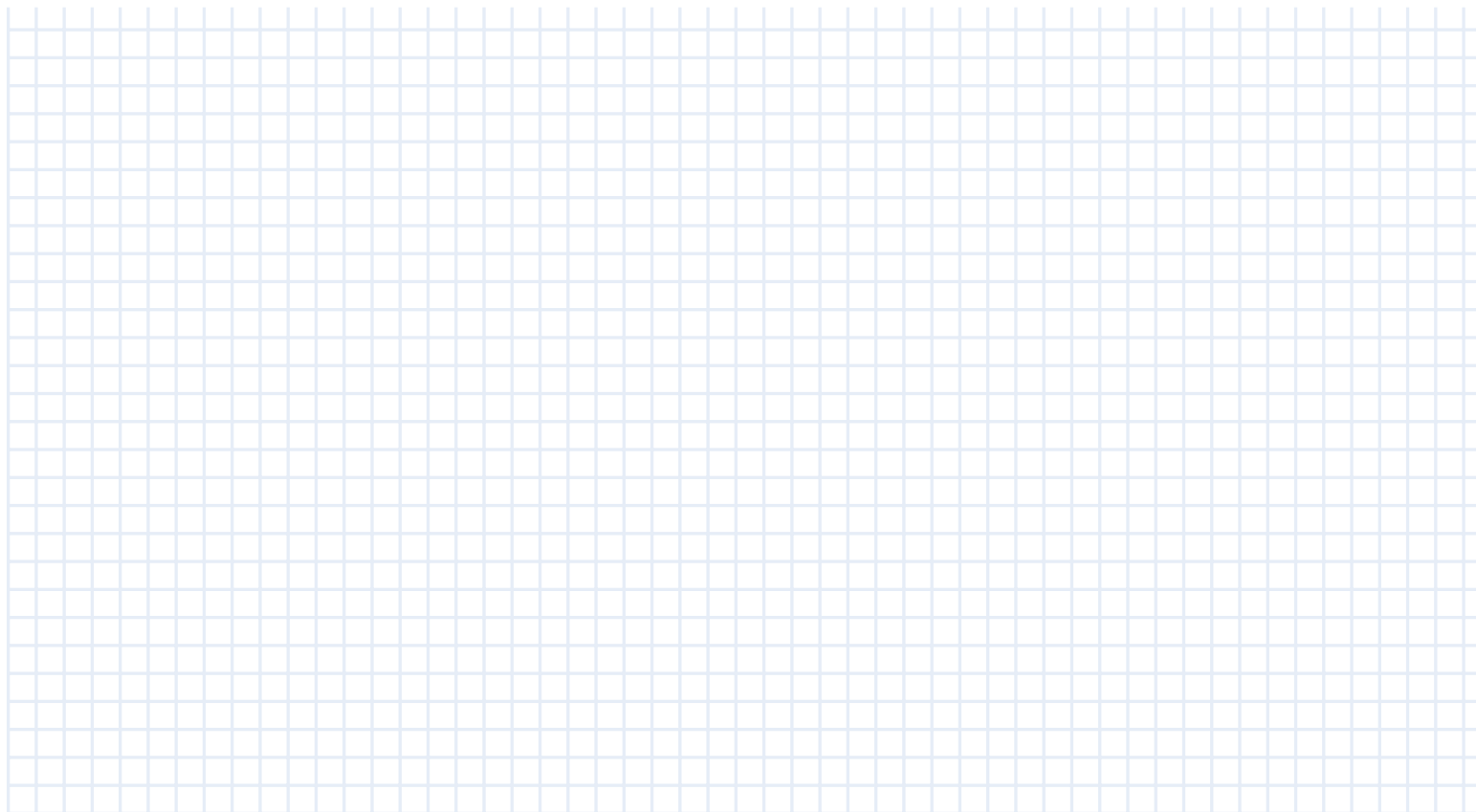
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

Méthode générale de résolution d'une telle équation :







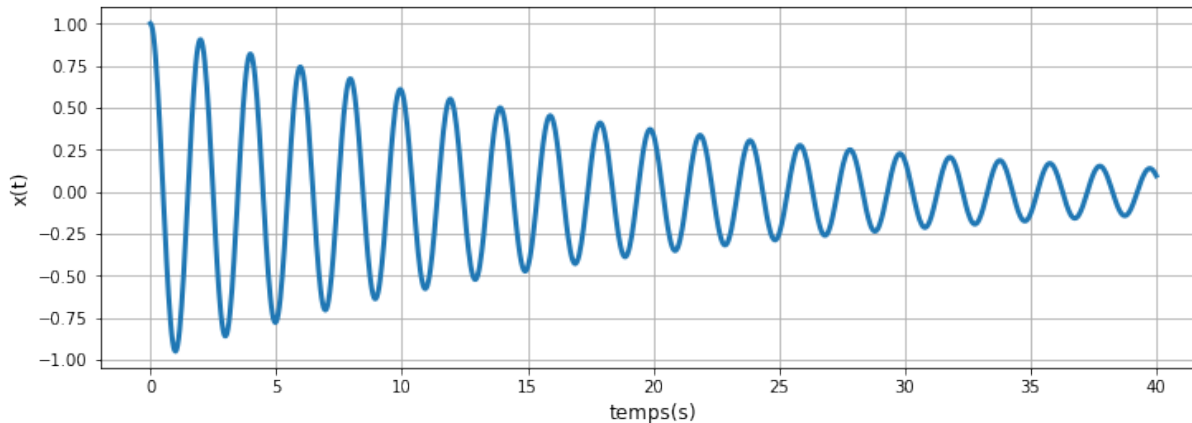


$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

Si $\gamma < \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec A et φ les constantes d'intégration et $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$

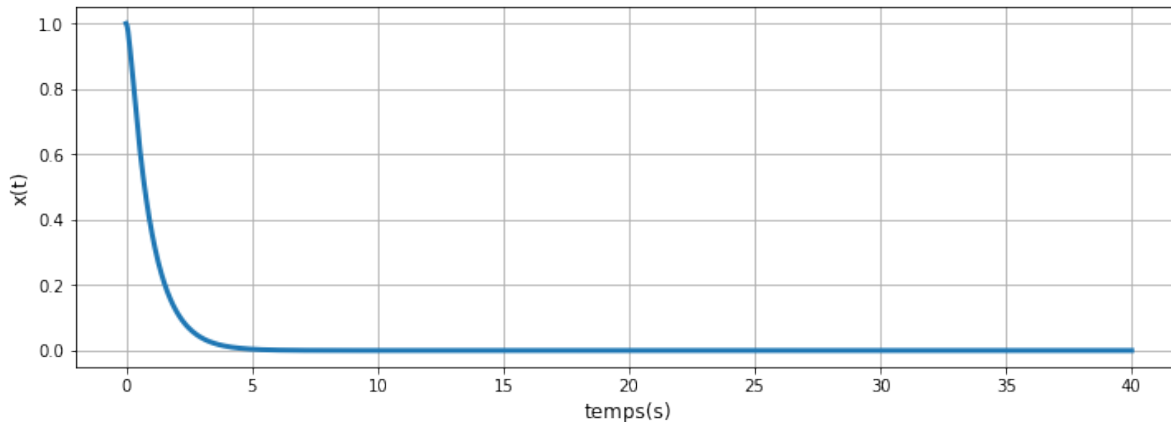


Si $\gamma > \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

avec λ_1 et λ_2 racines de l'équation du second degré en λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$$



Si $\gamma = \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

On remarque que $-\gamma$ est racine double de l'équation du second degré en λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 = 0$$

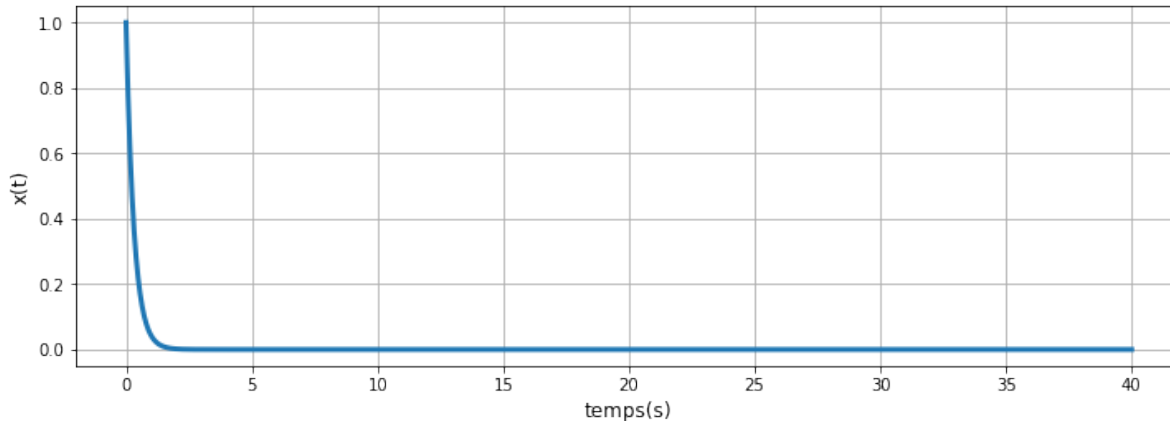


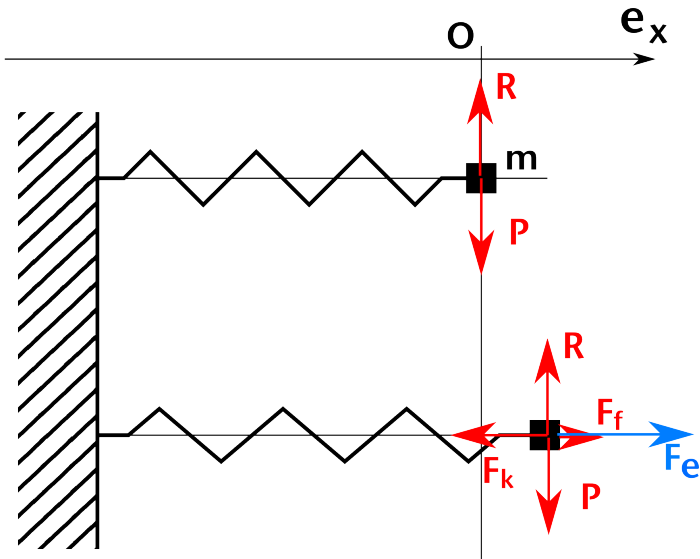
Table des matières

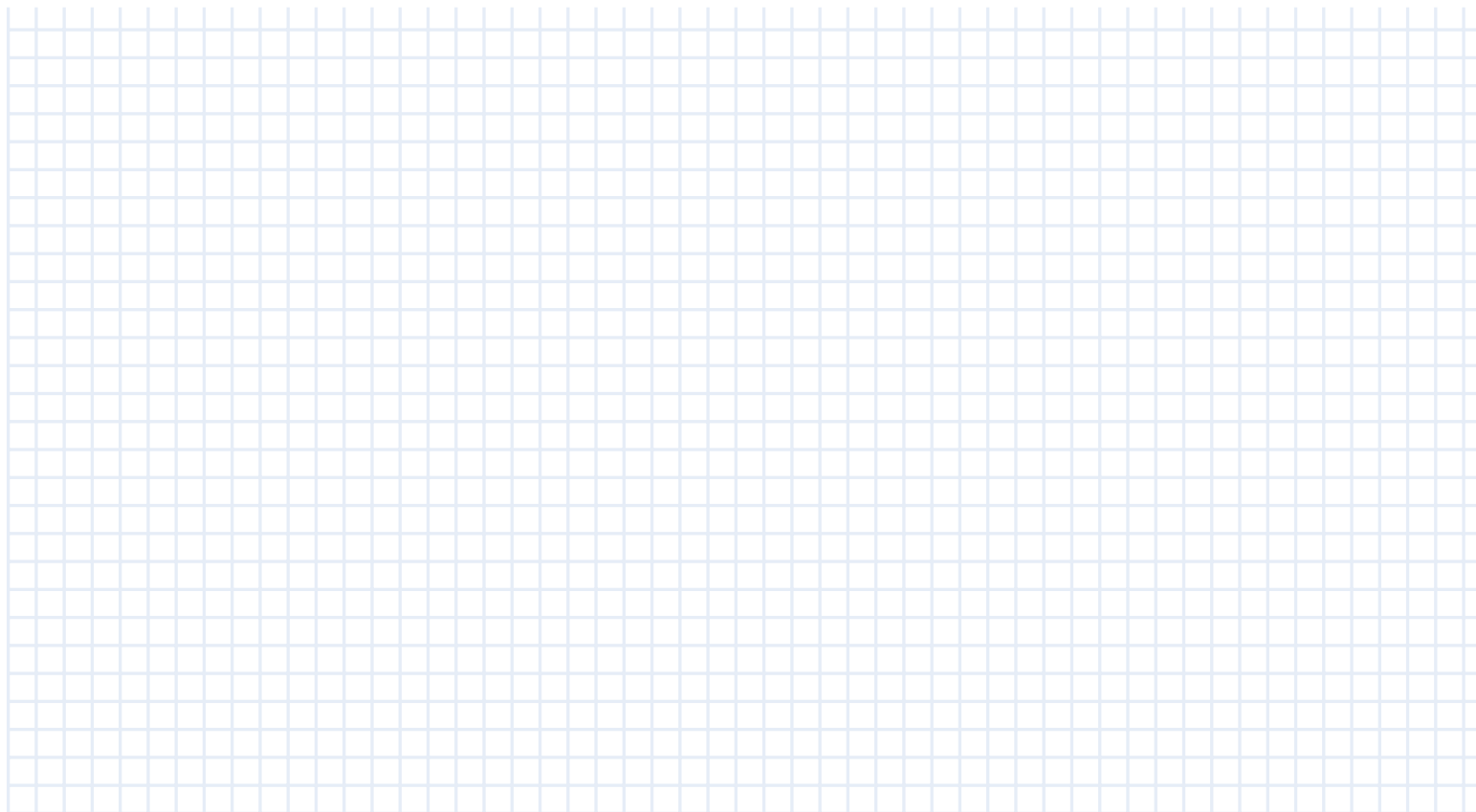
1. Oscillations libres non amorties
2. Oscillateurs non amortis et énergie
3. Oscillations amorties
4. Oscillations forcées

4. Oscillations forcées

On applique au système une force qui a une forme sinusoïdale :

$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$





C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode pour résoudre cette équation est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2ème membre (donc avec les constantes d'intégration : $x_2(t)$)

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode pour résoudre cette équation est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2ème membre (donc avec les constantes d'intégration) : $x_2(t)$

2 – **Une** solution particulière de l'équation avec 2ème membre (sans constante d'intégration) : $x_1(t)$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

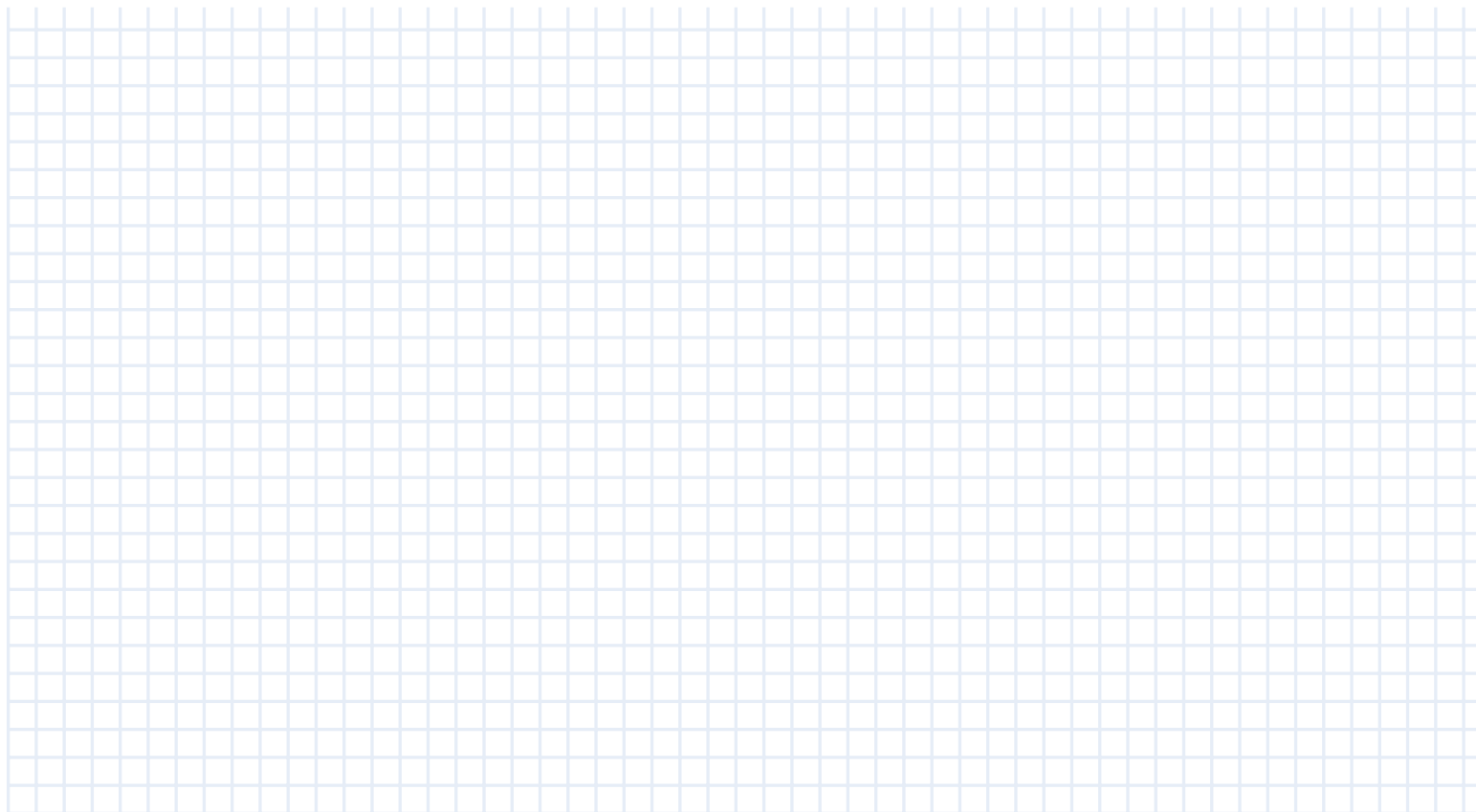
La méthode pour résoudre cette équation est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2ème membre (donc avec les constantes d'intégration) : $x_2(t)$

2 – **Une** solution particulière de l'équation avec 2ème membre (sans constante d'intégration) : $x_1(t)$

La solution **générale** de l'équation **avec** second membre sera :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



En observant le système (expérience) sur des échelles de temps longues, nous pouvons déduire les propriétés de $x(t)$ et donc de $x_1(t)$.

Caractéristiques de $x_1(t)$:

- ▶ $x_1(t)$ oscillatoire de pulsation ω_e
- ▶ l'amplitude de $x_1(t)$ dépend de ω_e
- ▶ $x_1(t)$ est déphasé par rapport à l'excitation
- ▶ le déphasage de $x_1(t)$ dépend de ω_e

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

et qu'elle est solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e t)$ avec
 $f_0 = F_0/m$

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

et qu'elle est solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e t)$ avec
 $f_0 = F_0/m$

Passons en notation complexe

$$ae^{i\theta} = a \cos \theta + ia \sin \theta$$

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

et qu'elle est solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

Passons en notation complexe

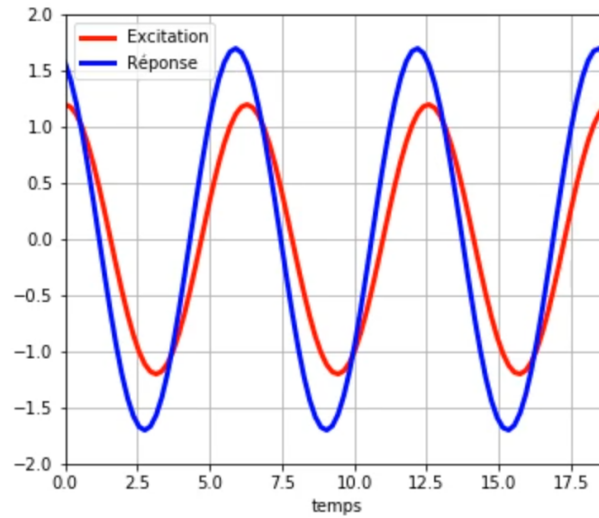
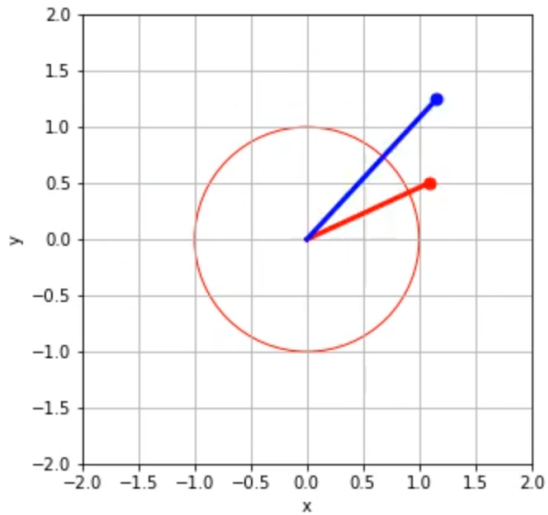
$$ae^{i\theta} = a \cos \theta + ia \sin \theta$$

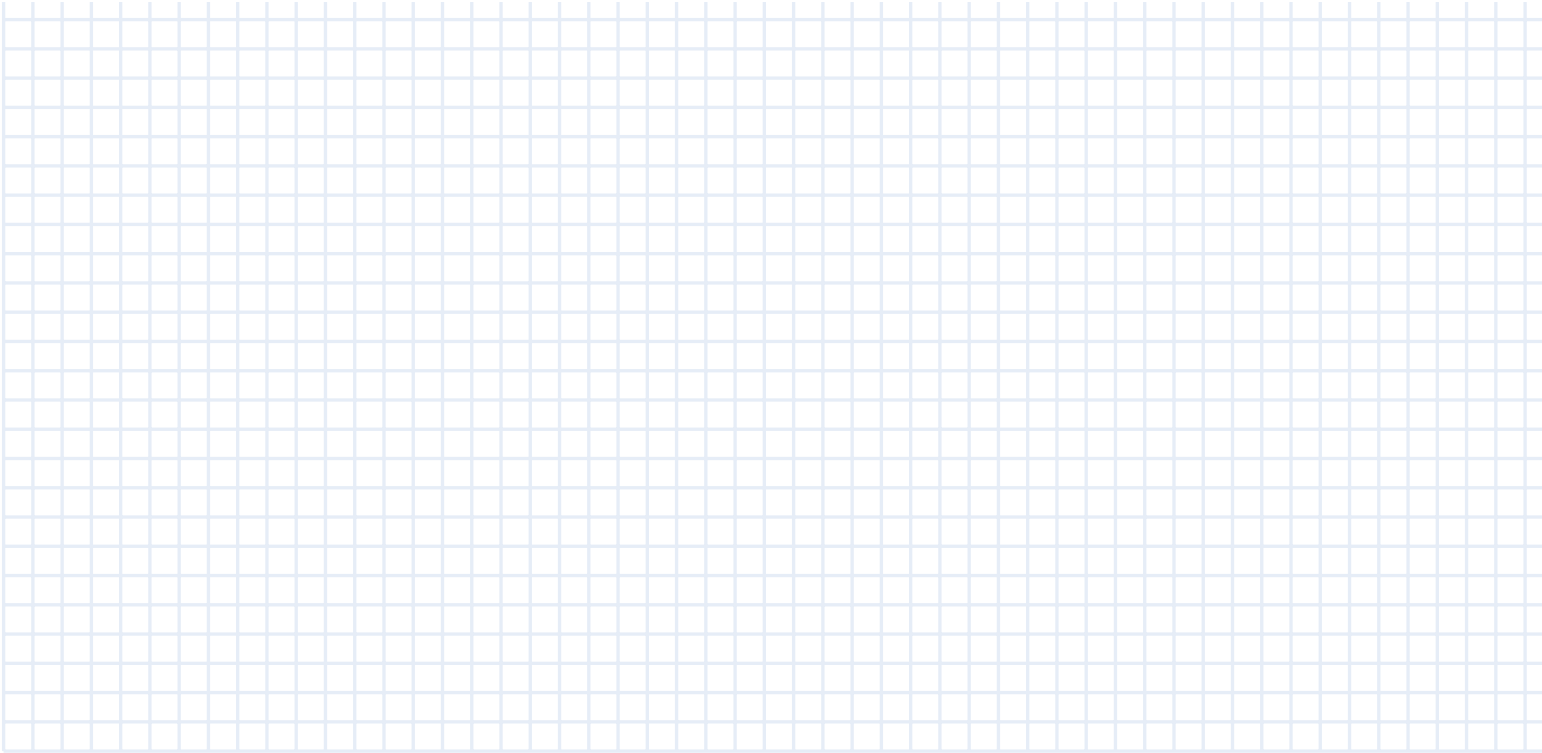
En notation complexe, l'équation différentielle devient :

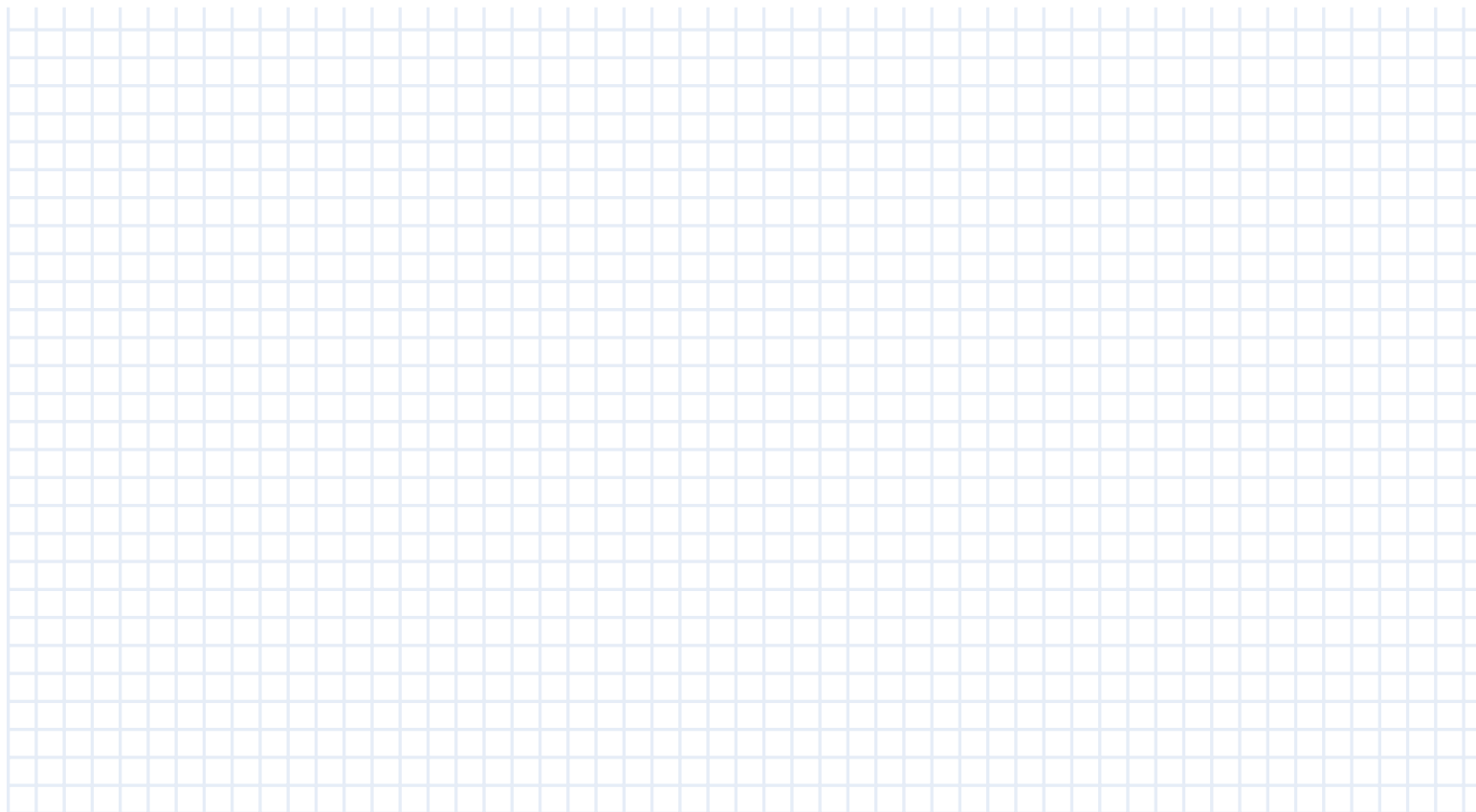
$$\underline{\ddot{x}} + 2\gamma\underline{\dot{x}} + \Omega_0^2 \underline{x} = f_0 e^{i\omega_e t}$$

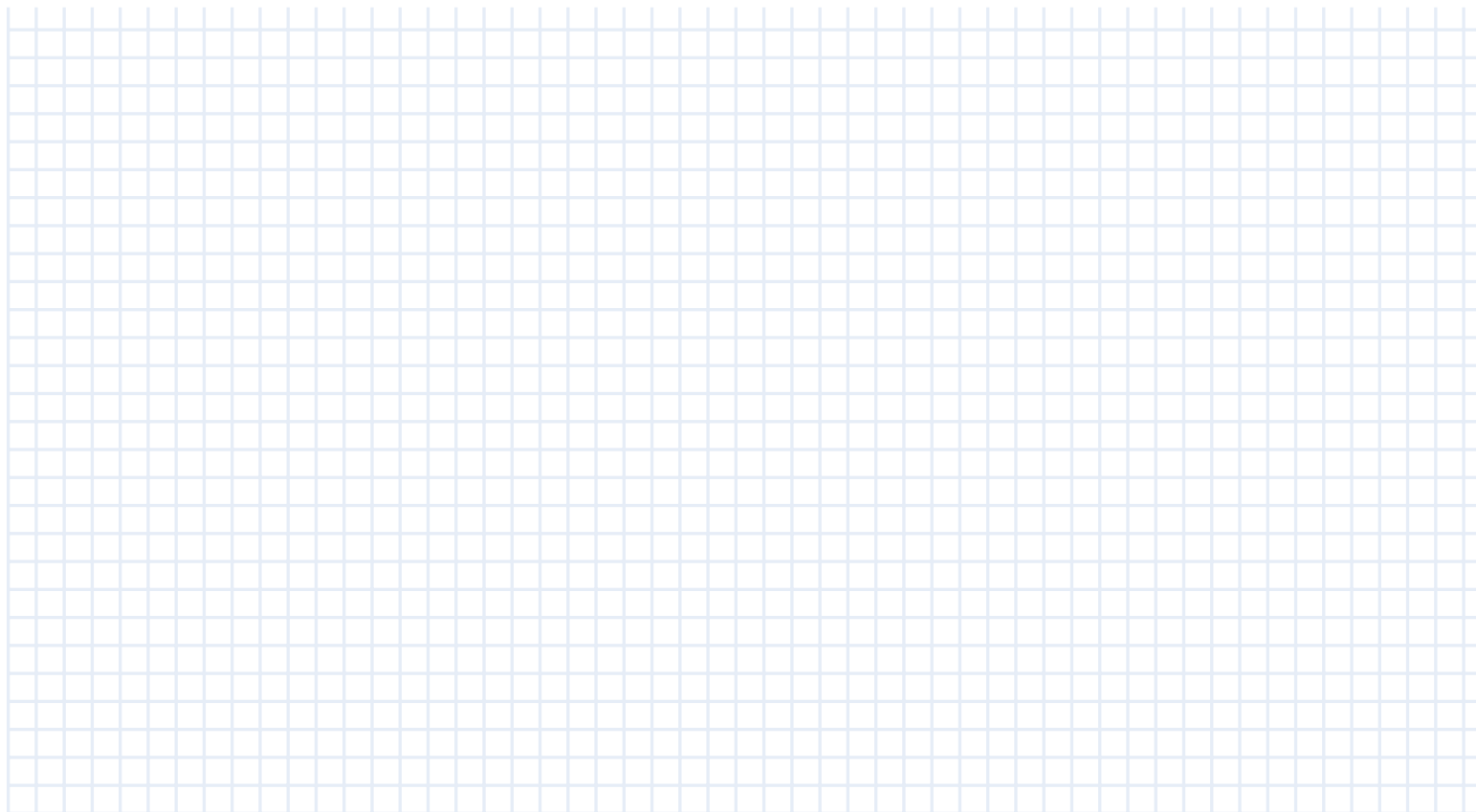
et l'équation particulière :

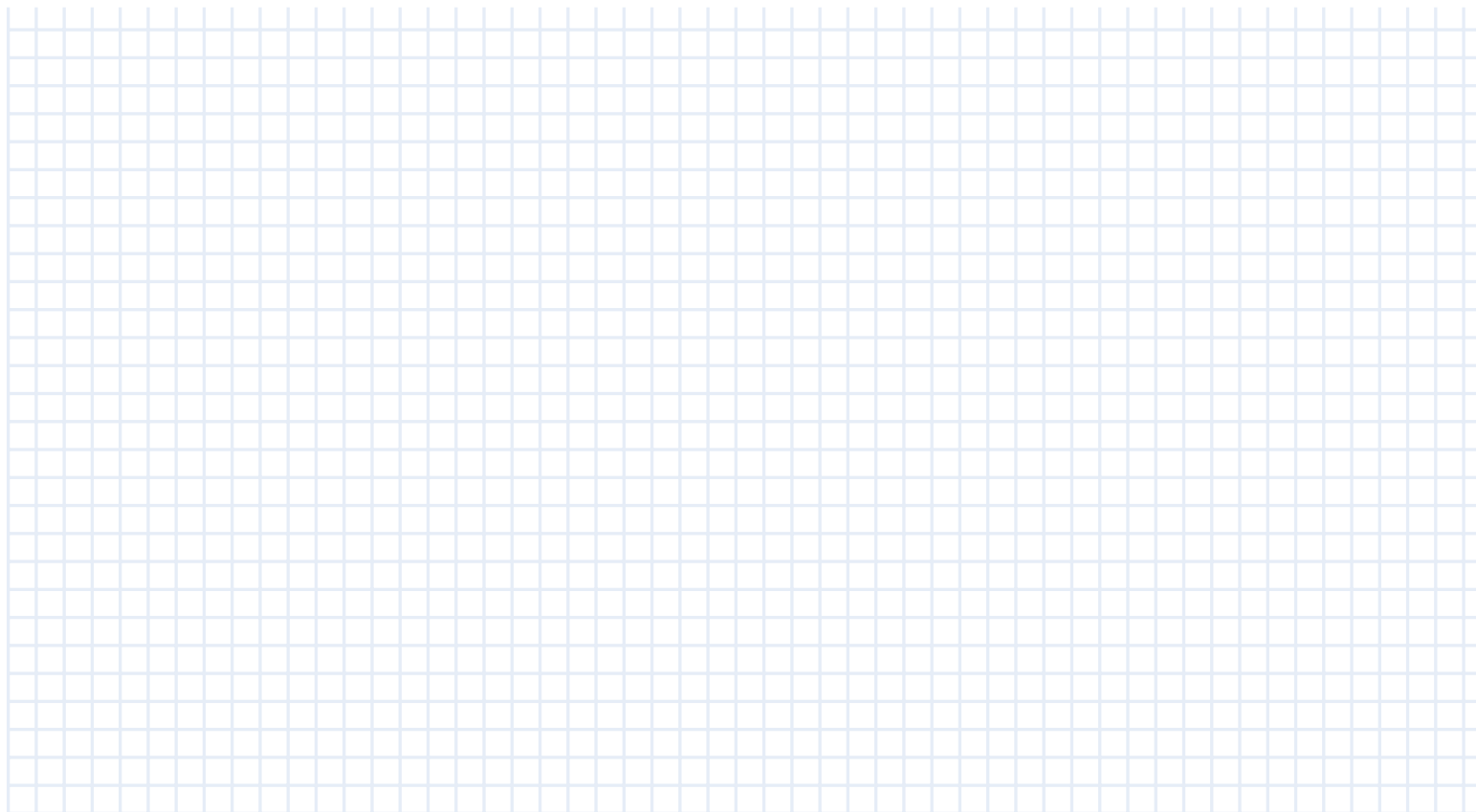
$$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e) e^{i(\omega_e t + \varphi)}$$



$$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e) e^{i(\omega_e t + \varphi)} \quad \text{solution de :} \quad \underline{\ddot{x}} + 2\gamma \underline{\dot{x}} + \Omega_0^2 \underline{x} = f_0 e^{i\omega_e t} \quad ??$$








Au final, de retour dans le monde réel :

$x_1(t) = A(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$ est bien une solution particulière, avec

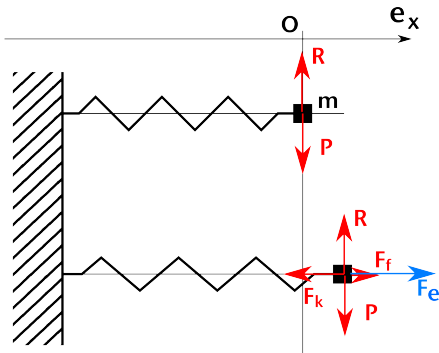
$$A(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{(\Omega_0^2 - \omega_e^2)}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \quad \sin \varphi = \frac{-2\gamma\omega_e}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad \text{avec, } \varphi \in [-\pi, 0]$$

Résumé :

On applique au système de masse m une force qui a une forme sinusoïdale :



$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = (F_0/m) \cos(\omega_e t)$$

La solution générale est la somme de x_1 et x_2

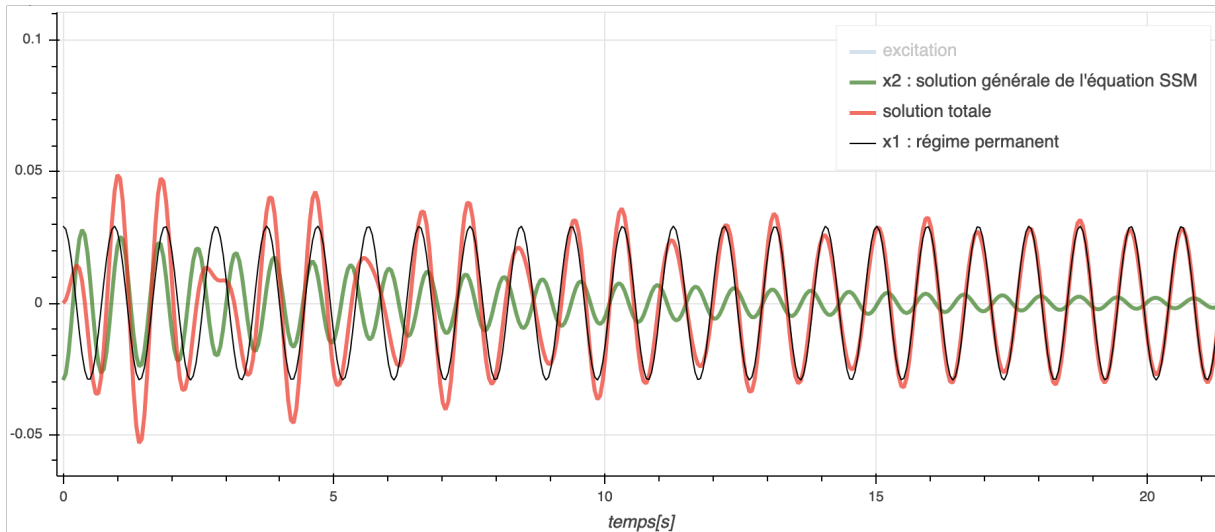
x_2 solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ tend **toujours vers 0!**

en régime permanent il reste $x_1(t) = A \cos(\omega_e t + \varphi)$

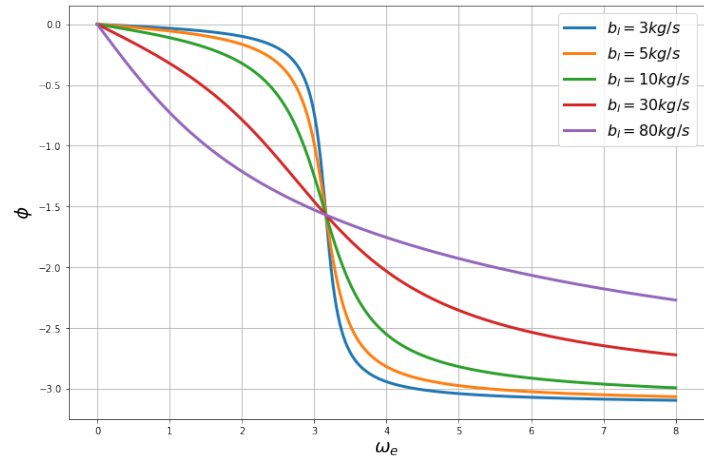
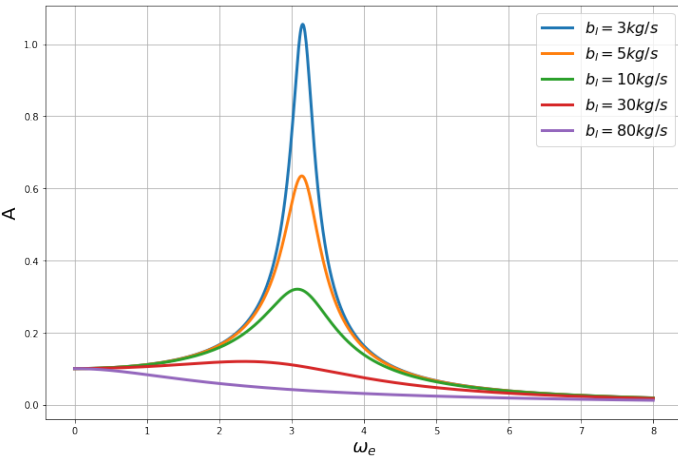
$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

Etablissement du régime permanent



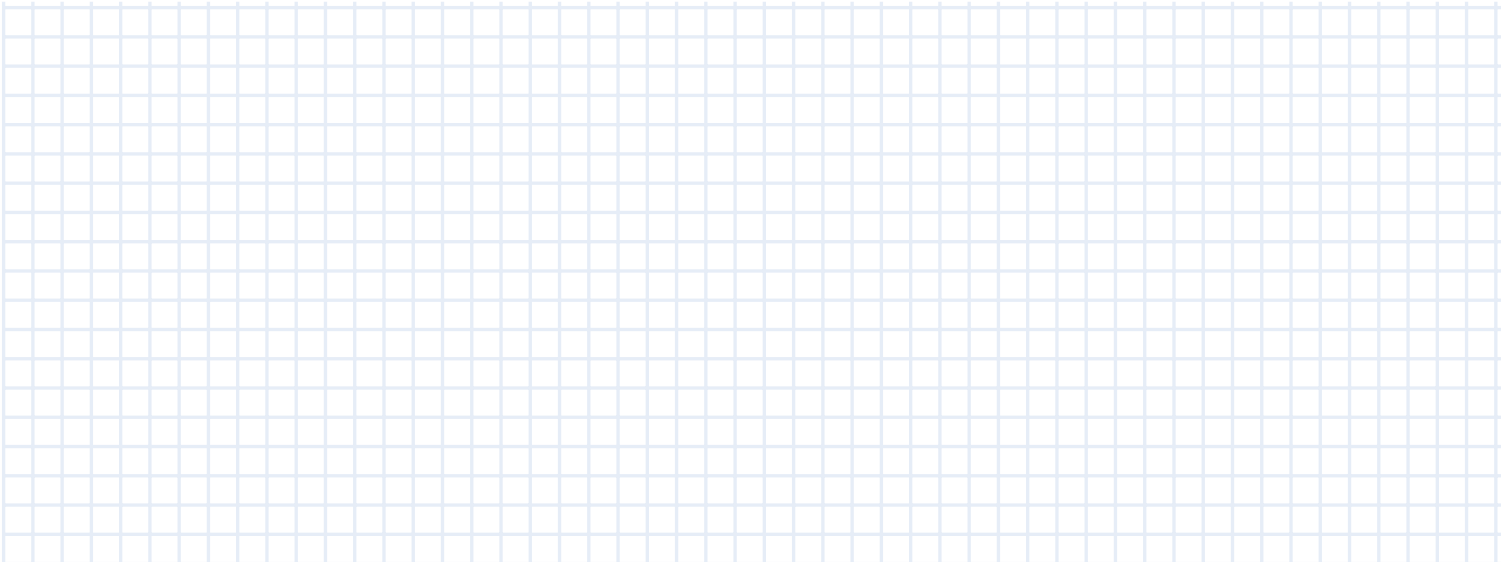
Analyse du régime permanent $x_1(t) = A(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$



Amplitude et déphasage en fonction de ω_e pour différents frottements.

Analyse de la fonction $A(\omega_e)$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$


$$A(\omega_e) = A_{\max} \quad \text{pour} \quad \omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Si $\gamma^2 > \Omega_0^2/2$ il n'y a pas de résonance.

Résumé sur les pulsations :

Ω_0 est la **pulsation propre** du système, soit la pulsation des oscillations si il n'y a ni amortissement ni forçage.

$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$ est la **pseudo-pulsation** du système avec amortissement, mais non forcé, quand l'amortissement est sous-critique.

ω_e est la **pulsation d'excitation** : une pulsation *imposée* par l'utilisateur dans le cas d'un oscillateur forcé.

$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$ est la **pulsation de résonance** : une valeur particulière de ω_e pour laquelle la réponse du système a une amplitude maximale en régime permanent.

Période = 2π /pulsation et fréquence = 1/période

Facteur de qualité

On définit le *facteur de qualité*

$$Q = \frac{\Omega_0}{2\gamma}$$

Une analyse dimensionnelle montre que Q est sans dimension.

$$A(\omega_e) = \frac{A(0)Q}{\sqrt{Q^2 \left(\frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2} - 1 \right)^2 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}}}$$

Amplitude maximale A_{\max}

$$A_{\max} = A(\omega_{\text{res}}) = \frac{A(0)Q^2}{\sqrt{Q^2 - 1/4}}$$

Si $Q \gg 1$, $A_{\max} \simeq A(0)Q$

Plus Q est grand plus A_{\max} est grand.

Q donne directement une mesure de la "qualité" de la résonance.