VII. Chocs ; systèmes de masse variable

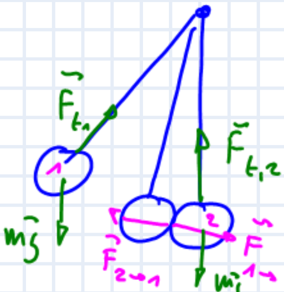
Dr. Yves Revaz

2025

Plan du cours

Table des matières

1. Motivation



$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$

1) avant le choc (syst. sont séparés) Newton (2ème loi)

2) pendant le choc (syst. dans son ensemble, on néglige les forces ext., $\sum \vec{F}^{int} = 0$)

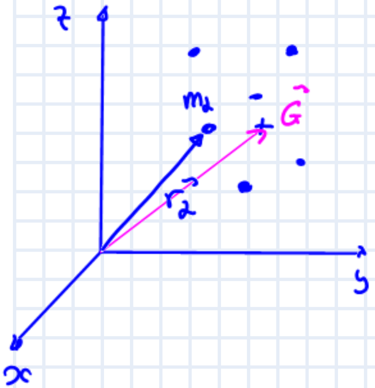
3) après le choc (syst. sont séparés) Newton (2ème loi)

Table des matières

2 - Centre de masse ; référentiel centre-de-masse

Soit un **système** de N particules $(m_1, m_2, ...m_N)$ à des positions $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N)$ dans un référentiel $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Par définition, le centre de masse G du système est donné par



$$\vec{OG} = \vec{r}_G := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum m_\alpha}$$

$$\sum_\alpha m_\alpha = M$$

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha}$$

$$\vec{v}_G = \frac{d}{dt} \vec{r}_G = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M} \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha \right) = \frac{1}{M} \sum_\alpha \frac{d}{dt}(m_\alpha \vec{r}_\alpha)$$

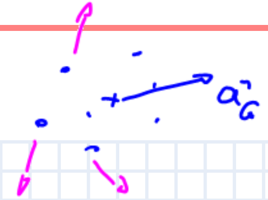
$$= \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \frac{d}{dt} \vec{r}_\alpha = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

$$\boxed{\vec{v}_G = \frac{1}{M} \sum m_\alpha \vec{v}_\alpha}$$

$$\boxed{\vec v_G = \frac{1}{M}\sum m_\alpha \vec v_\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\vec P = \sum F^{ext}$$

Loi de Newton pour le système total : $\sum \vec F^{ext} = M\vec a_G$



$$\vec p_\alpha := m_\alpha \vec v_\alpha$$

syst. de N points $\qquad \vec P_{tot} = \sum_\alpha \vec p_\alpha = \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec v_\alpha}$

$$\boxed{\vec P_{tot} = M \cdot \vec v_G}$$

$$\frac{d}{dt}\vec P_{tot} = \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec v_\alpha\right) = \sum_\alpha m_\alpha\left(\frac{d}{dt}\vec v_\alpha\right) = \sum_\alpha m_\alpha \vec a_\alpha$$

$\frac{d}{dt}$

$$m_\alpha \vec a_\alpha = \sum_i \vec F^{\alpha,i} = \sum_i \vec F^{\alpha,i,int} + \sum_i \vec F^{\alpha,i,ext}$$

$$\frac{d}{dt}\vec P_{tot} = \sum_\alpha\left(\sum_i \vec F^{\alpha,i,int} + \sum_i \vec F^{\alpha,i,ext}\right) = \cancel{\sum_i\sum_\alpha \vec F^{\alpha,i,int}} + \sum_i\sum_\alpha \vec F^{\alpha,i,ext}$$

$$\frac{d}{dt}\vec P_{tot} = \sum_i\sum_\alpha \vec F^{\alpha,i,ext} = \sum \vec F^{ext}$$

$$\boxed{M\vec a_G = \sum \vec F^{ext}}$$

Loi de Newton pour le système total

$\vec{v}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OG}$ est la vitesse du centre de masse

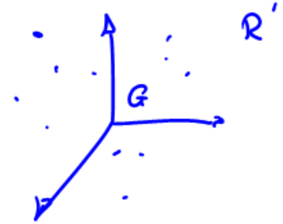
$$\vec{P} = M\vec{v}_G$$

Avec $\vec{P}$ quantité de mouvement totale et M masse totale

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Avec $\sum \vec{F}^{\text{ext}}$ somme des force externes et $\vec{a}_G$ accélération du centre de masse.

Le **référentiel centre-de-masse (cdm)** est le référentiel qui a pour origine G et se déplace avec lui à $\vec{v}_G$.



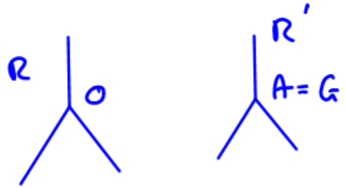
$\vec{v}_G = \text{cte} \qquad \vec{a}_G = 0$: réf cdm est galiléen

$\vec{v}_G \neq \text{cte} \qquad \vec{a}_G \neq 0$: réf cdm est non galiléen

$= M \vec{a}_G$

Si $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$ alors le référentiel cdm est galiléen.

La particule α a une vitesse $\vec{v}_\alpha$ ($\vec{v}_\alpha$) dans $(0, x, y, z)$ et $\vec{V}_\alpha$ ($\vec{V}_\alpha$) dans le référentiel centre-de-masse.



$$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{v}_\alpha &= \vec{v}_G + \vec{V}_\alpha \\ \vec{V}_\alpha &= \vec{v}_\alpha - \vec{v}_G \end{aligned} \right.$$

Cas de 2 particules

But $\vec V_1(\vec v_1, \vec v_2)$ $\vec V_2(\vec v_1, \vec v_2)$

Deux particules, masse m_1 et m_2. Vitesses $\vec v_1$ et $\vec v_2$ dans $\mathcal{R}$.

$$\vec v_G = \frac{m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec V_1 = \vec v_1 - \vec v_G = \vec v_1 - \frac{m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2}{m_1 + m_2} = \frac{\cancel{m_1 \vec v_1} + m_2 \vec v_1 - \cancel{m_1 \vec v_1} - m_2 \vec v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{\vec V_1 = \frac{m_2 (\vec v_1 - \vec v_2)}{m_1 + m_2}}$$

$$\vec V_2 = \vec v_2 - \vec v_G = \vec v_2 - \frac{m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec v_2 + \cancel{m_2 \vec v_2} - m_1 \vec v_1 - \cancel{m_2 \vec v_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{\vec V_2 = \frac{m_1 (\vec v_2 - \vec v_1)}{m_1 + m_2}}$$

Quantités de mouvement :

$\vec{p}_1 \ \vec{p}_2$ labo

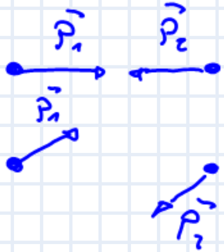
$\vec{P}_1 \ \vec{P}_2$ cdm

μ : masse réduite

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 = m_1 \left(m_2 \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right) = \overbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \right) = \mu \left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \right)$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2 = m_2 \left(m_1 \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \right) = \mu \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \right)$$

$$\boxed{\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0}$$



Résumé : Deux particules, masse m_1 et m_2. Vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{R}$.

Le cdm à une vitesse $\vec{v}_G$ et dans le réf. cdm les particules ont les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

$$\vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1); \qquad \vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1 = -\mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad \vec{P}_2 = m_2\vec{V}_2 = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Table des matières

3 - Types de chocs

$E_p^i = E_p^f$

On considère le cas $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$, donc $\vec{P}_{\text{tot}}$ est conservée.

Choc élastique : l'énergie mécanique est conservée, pas de dissipation d'énergie (balle rebondissante).

$$E_m^i = E_c^i + E_p^i = E_m^f = E_c^f + E_p^f$$

$$\boxed{E_c^i = E_c^f}$$

$$\vec{p}^{\,i} = \vec{p}^{\,f}$$

Choc parfaitement inélastique/choc mou : pas de rebondissement, les objets restent collés après le choc (convertion d'énergie cinétique en chaleur)

$$\boxed{\vec{v}_{fin} = \vec{v}_{fin}^{\,1} = \vec{v}_{fin}^{\,2}}$$

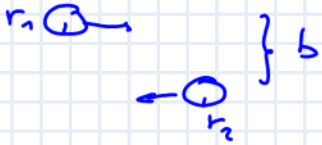
$$\boxed{\vec{p}_i = \vec{p}_f}$$

Les cas réels sont presque toujours entre les deux.

Table des matières

4 - Chocs élastiques

1. cas simples, particules / pt. matériel
2. calculs dans le cdm

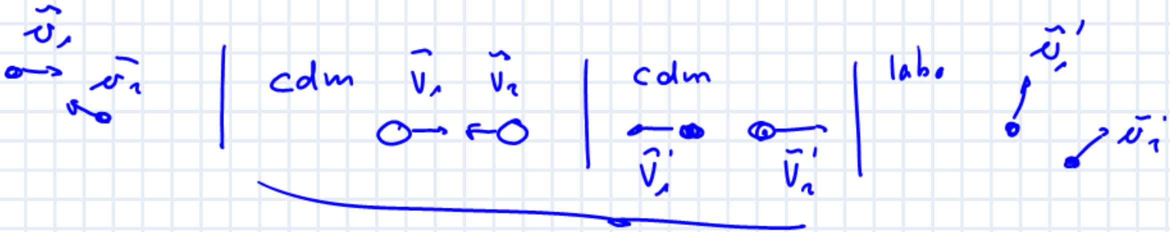


2 possibilités

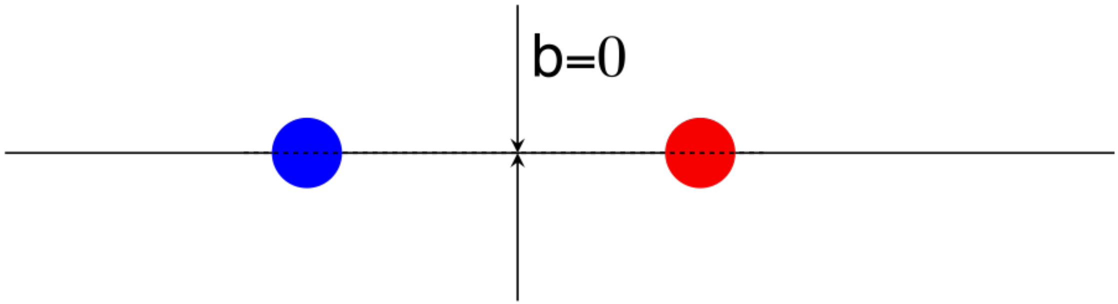
①

②

- $b > r_1 + r_2$
- $b < r_1 + r_2 \rightarrow$ choc



Cas particulier du choc frontal. $b = 0$



Si $b = 0$ et avec $\vec{V}_1$ colinéaire à $\vec{V}_2$, les trajectoires restent sur l'axe des trajectoires initiales. Problème à 1 dimension dans le réf cdm.

Vitesses algébriques, projetées sur l'axe défini par les trajectoires.

$v_1 \quad v_2 \quad \rightarrow \quad v_1' \quad v_2'$

v_1, v_2, v_1', v_2' -> algébrique

> 0

< 0

$= 0$

But : calculer les vitesses après le choc (frontal)

dans le cdm

① Quantité de mouvement

$\vec{P}_{tot} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \qquad m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0 \qquad \boxed{V_2 = -\frac{m_1}{m_2} V_1}$

$\vec{P}_1' + \vec{P}_2' = 0 \qquad m_1 V_1' + m_2 V_2' = 0 \qquad \boxed{V_2' = -\frac{m_1}{m_2} V_1'}$

② Energie cinétique $\quad E_c = \frac{1}{2} m V^2$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 V_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 V_2^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 V_1'^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 V_2'^2$$

$$m_1 V_1^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} V_1^2 = m_1 V_1'^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} V_1'^2$$

$$\left(m_1 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}\right) V_1^2 = \left(m_1 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}\right) V_1'^2 \Rightarrow \boxed{V_1^2 = V_1'^2}$$

1) $V_1 = V_1' \quad V_2 = V_2'$
pas de choc

2) $V_1 = -V_1' \quad V_2 = -V_2'$

$V_1 (v_1, v_G) \quad V_2 (v_2, v_G)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\vec{v}_1' \, (V_1', V_2')$

$\vec{v}_1' \; \vec{v}_2' \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

$$V_1' = -V_1 \quad \text{et} \quad V_2' = -V_2$$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_G + \vec{V}_1' = \vec{v}_G - \vec{V}_1 = \vec{v}_G - (\vec{v}_1 - \vec{v}_G) = 2\vec{v}_G - \vec{v}_1$$

$$= 2\left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right) - \vec{v}_1 = \frac{2\cancel{m_1\vec{v}_1} + 2m_2\vec{v}_2 - \cancel{m_1\vec{v}_1} - m_2\vec{v}_1}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\boxed{\vec{v}_1' = \frac{(m_1-m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_G + \vec{V}_2' = \ldots$$

$$\boxed{\vec{v}_2' = \frac{-(m_1-m_2)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}}$$

Au final, pour un choc frontal

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

Cas particuliers (plus simples)

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + \cancel{2m_2\vec{v}_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{\cancel{(m_2 - m_1)\vec{v}_2} + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

Cas particulier $\vec{v}_2 = 0$

$\vec{v}_1 \neq 0$ $\vec{v}_2 = 0$

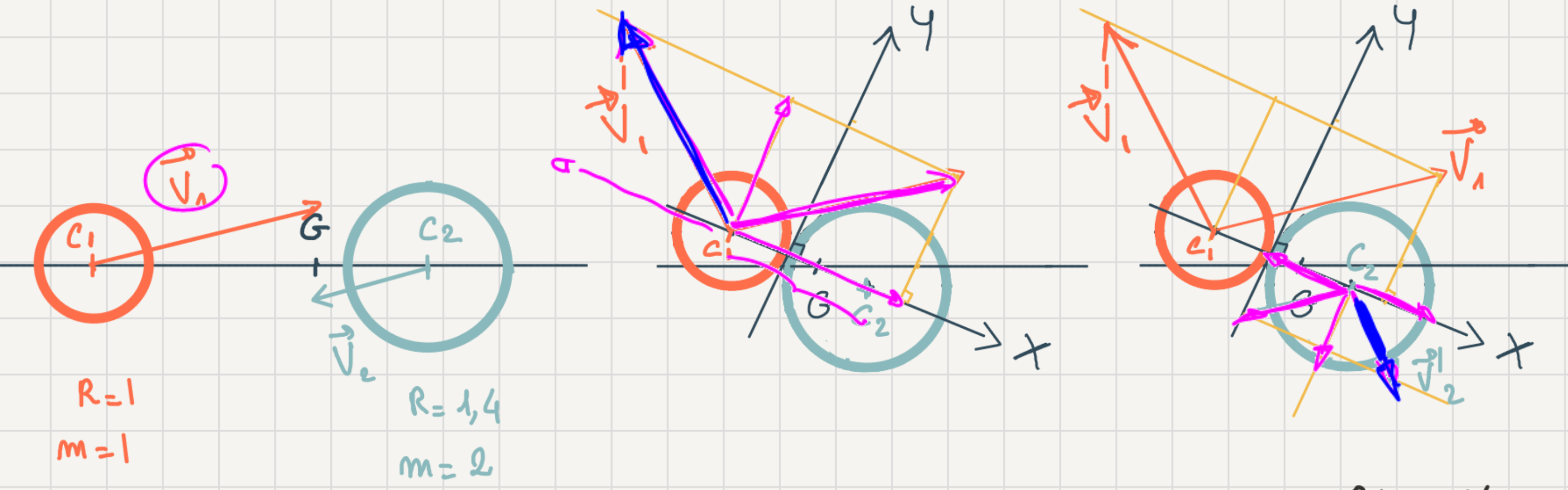
$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \quad ; \quad \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

Si $m_1 > m_2$ Les 2 particules continuent dans le même sens

Si $m_1 = m_2$ La particule 1 s'arrête, la 2 part avec $\vec{v}_1$

Si $m_1 < m_2$ la particule 1 repart dans l'autre sens

Cas d'un choc non frontal ($b \neq 0$)

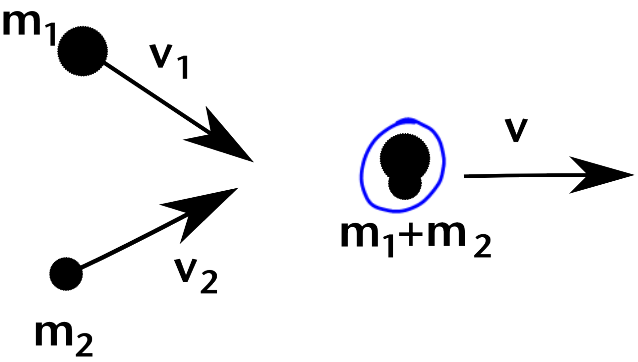


Vitesses initiales dans le référentiel centre de masse

Construction des vitesses $\vec{V}_1'$ et $\vec{V}_2'$ après le choc dans le référentiel c.d.m

Table des matières

5 - Choc mou



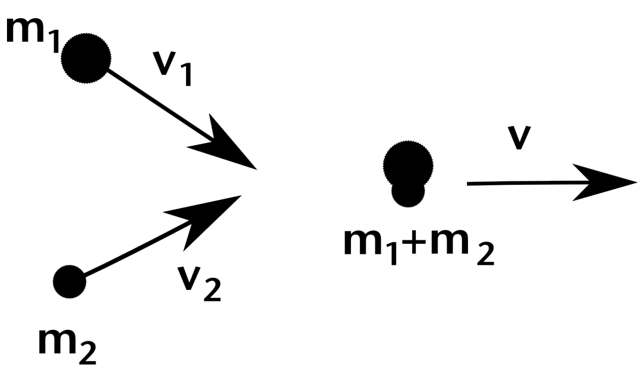
$$\vec{p}^{\,i}_{tot} = \vec{p}^{\,f}_{tot}$$

?

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\,\vec{v}$$

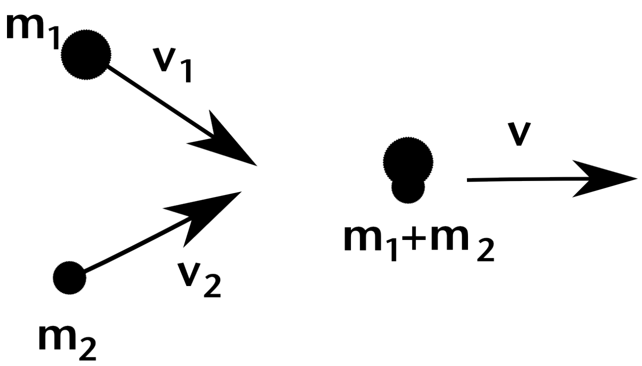
$$\boxed{\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \vec{v}_G}$$

5 - Choc mou



Pour un choc mou (parfaitement inélastique), les deux particules restent collées après le choc. (Ou elles étaient collées avant une explosion).

5 - Choc mou



Pour un choc mou (parfaitement inélastique), les deux particules restent collées après le choc. (Ou elles étaient collées avant une explosion).

La quantité de mouvement reste conservée mais pas l'énergie cinétique. Une partie est dissipée sous forme de chaleur.

5 - Choc mou ou parfaitement inélastique

Il n’y a pas conservation de l’énergie cinétique, mais on peut calculer la différence d’énergie cinétique avant et après.

Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique, mais on peut calculer la différence d'énergie cinétique avant et après.

Avant :

$$E_{c,1} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique, mais on peut calculer la différence d'énergie cinétique avant et après.

$\Delta E_c = E_c^i - E_c^f$?

Avant :

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Après :

$$E_{c,2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

$\vec{v} \cdot \vec{v}$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot \left(\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= \frac{m_1^2 v_1^2 + 2 m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$\Delta E_c = E_c^f - E_c^i = \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}\left(\frac{m_1^2 v_1^2 + 2\, m_1 m_2\, \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\right) - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{m_1^2 v_1^2} + 2 \underline{m_1 m_2}\, \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \cancel{m_2^2 v_2^2} - \cancel{m_1^2 v_1^2} - m_1 m_2 v_1^2 - \underline{m_1 m_2}\, v_2^2 - \cancel{m_2^2 v_2^2}}{m_1+m_2}\right]$$

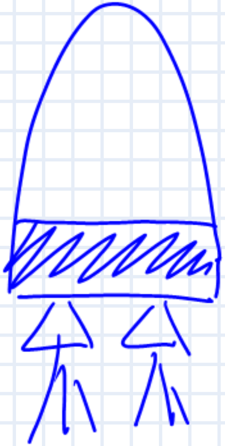
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(v_1^2 - 2\,\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_2^2\right)$$

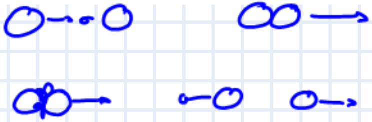
$$\boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{2}\,\mu\,(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}$$

masse
réduite

Table des matières

6 - Système de masse variable : fusée





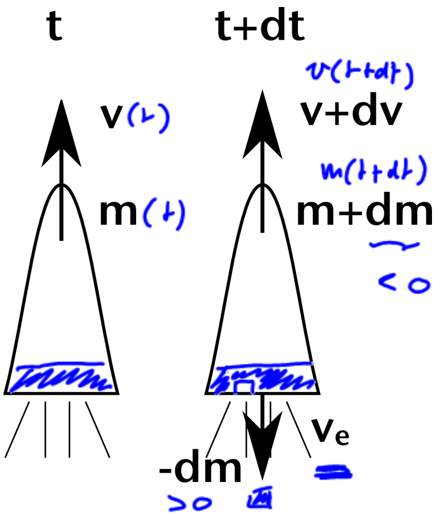
1. $m \neq cte$

$$\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

2. idée : discrétiser sur le temps

t $\qquad$ $t + \Delta t$



$$m(t+dt) \cong m(t) + \overbrace{\frac{dm}{dt}\cdot dt}^{dm} + \dots$$

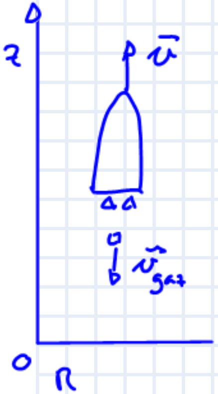
$$v(t+dt) \cong v(t) + \underbrace{\frac{dv}{dt}\,dt}_{dv} + \dots$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt}$$

- Fusée de masse initiale m_0
- Les gaz sont éjectés à vitesse constante par rapport à la fusée et à un taux constant
- Système : fusée à l'instant t (masse m, vitesse $\vec{v}$)
- Après : $t + \mathrm{d}t$, la fusée a éjecté une masse $-\mathrm{d}m$

$$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P)$$

$$\vec{v}_{gaz} = \vec{v}(t+dt) + \vec{v}_e$$



$$\vec{p}(t) = m(t)\cdot\vec{v}(t)$$

$$\vec{p}(t+dt) = m(t+dt)\cdot\vec{v}(t+dt) + \left(-dm\,\vec{v}_{gaz}\right) \qquad \underbrace{(\vec{v}(t)+d\vec{v})}$$

$$= \left(m(t)+dm\right)\left(v(t)+dv\right) + \left(-dm\left(\vec{v}(t+dt)+\vec{v}_e\right)\right)$$

$$= m(t)v(t) + m(t)dv + \cancel{dm\,v(t)} + \cancel{dm\,dv} + -\cancel{dm\,v(t)}$$
$$- \cancel{dm\,dv} - dm\,\vec{v}_e$$

$$= m(t)\vec{v}(t) + m(t)\,d\vec{v} - dm\,\vec{v}_e$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \lim_{dt\to 0} \frac{m(t)\,d\vec{v} - dm\,\vec{v}_e}{dt}$$

$$= \lim_{dt\to 0} \frac{m(t)\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\cancel{dt} - \frac{dm}{dt}\cdot\cancel{dt}\,\vec{v}_e}{\cancel{dt}}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = m(t)\,\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_e}$$

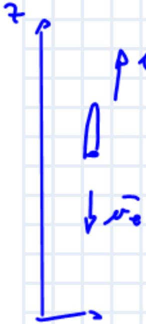
$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = \underbrace{m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{v}_e}_{=0}}$$

1 $\sum \vec{F}^{ext} = 0$ vide

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{v}_e = 0$$

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v}_e = -v_e\,\vec{e}_z$$



$$m(t)\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v_e = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

$$\int_{t=0}^{t}\frac{dv}{dt}\cdot dt = -v_e\int_{t=0}^{t}\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\,dt = -v_e\int_{m=0}^{m(t)}\frac{1}{m}\,dm$$

$$v\Big|_{t=0}^{t} = -v_e\left(\ln(m)\Big|_{m=0}^{m(t)}\right)$$

$$v(t) - v_0 = -v_e\left(\ln(m(t)) - \ln(m_0)\right)$$

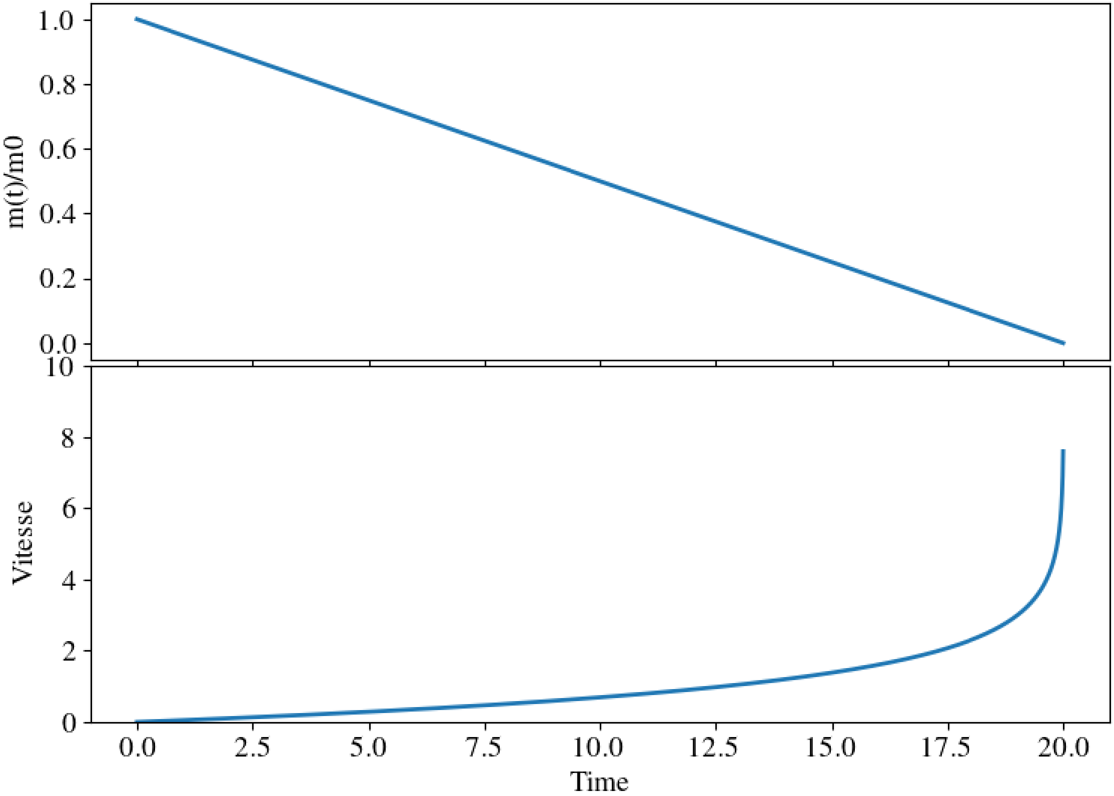
$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$v(t) - v_0 = -v_e\left(\ln(m(t)) - \ln(m_0)\right)$$

$$\boxed{v(t) = \underbrace{v_c}_{=0} + v_e \ln\left(\underbrace{\frac{m_0}{m(t)}}_{>1}\right)}$$

$$m(t) = m_0 - \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{cte} \cdot t$$

Évolution de la masse et vitesse de la fusée sans gravité :



Si la fusée monte verticalement dans le champ de pesanteur $\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{g}$

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{v}_e}$$

$m(t)\vec{g}$

② surface de la terre $\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{g}$

$\vec{v} = v\,\vec{e}_z$

$\vec{v}_e = -v_e\,\vec{e}_z$

$\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$

$$m(t)\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v_e = -gm$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}\frac{1}{m} - g$$

$$m(t) = m_0 - \frac{dm}{dt}\cdot t$$

$$\int_{t=0}^{t}\frac{dv}{dt}dt = -v_e\int_{t=0}^{t}\frac{dm}{dt}\frac{1}{m}dt - \int_{t=0}^{t} g\,dt$$

$$v(t) - \underbrace{v_0}_{v_0=0} = v_e\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt$$

$$\boxed{v(t) = v_e\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt}$$

Évolution de la masse et vitesse de la fusée avec gravité :