VI. Travail, énergie, principes de conservation

Dr. Yves Revaz

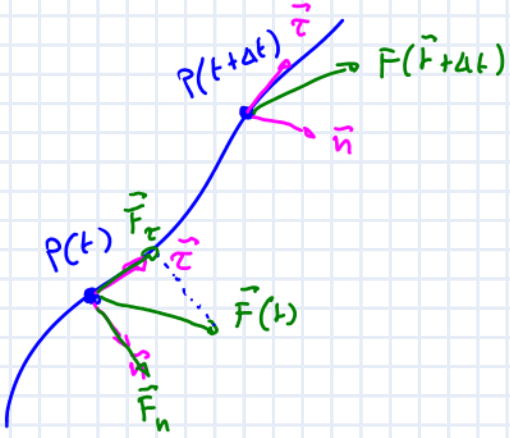
2025

Plan du cours

Table des matières

VI - 1 Travail d'une force, puissance

$F_\tau = |\vec{F}_\tau|$ $\quad F_n = |\vec{F}_n|$



repère du Frénet

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$$
$$= F_\tau \vec{\tau} + F_n \vec{n}$$

$\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad$ 2^n loi de Newton

$$= m\vec{a}_\tau + m\vec{a}_n$$
$$= m a_\tau \vec{\tau} + m a_n \vec{n}$$

$$\begin{cases} F_n = m a_n & \rightarrow \text{mod. la direction de } \vec{v} \\ \boxed{F_\tau = m a_\tau} & \rightarrow \text{mod la norme de } \vec{v} \end{cases}$$

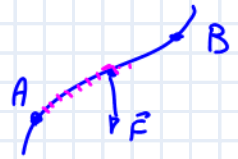
$\downarrow$ la force travaille

Définitions

Le travail d'une force $\vec{F}$ pour un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$

$$\delta W^{\vec{F}} := \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot dr \cdot \vec{\tau} = F_\tau \cdot dr$$

Le travail de la force $\vec{F}$ de A à B



$$\boxed{W_{AB}^{\vec{F}} := \int_A^B \delta W^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Travail total : plusieurs forces

$$\vec{F}^{tot} = \sum_i \vec{F}^i$$

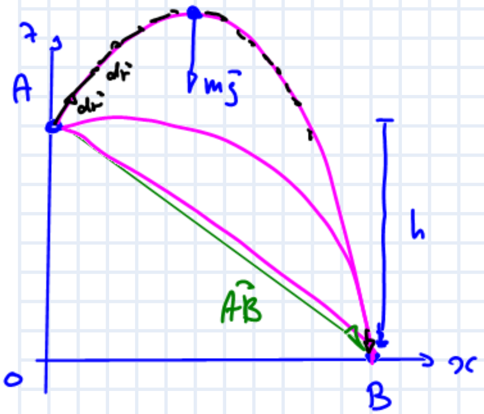
$$W_{AB}^{\vec{F}^{tot}} = \int_A^B \vec{F}^{tot} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(\sum_i \vec{F}^i\right) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_A^B \sum_i \left(\vec{F}^i \cdot d\vec{r}\right)$$

$$= \sum_i \int_A^B \vec{F}^i \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{W_{AB}^{\vec{F}^{tot}} = \sum_i W_{AB}^{\vec{F}^i}}$$

Exemple 1 : travail du poids dans un tir balistique



$$W_{AB}^{\vec F} = \int_A^B \vec F \cdot d\vec r = \int_A^B m\vec g \cdot d\vec r$$

$$= m\vec g \underbrace{\int_A^B d\vec r}_{\vec{AB}} = m\vec g \cdot \vec{AB}$$

$$W_{AB}^{\vec F} = m\vec g \cdot \vec{AB}$$

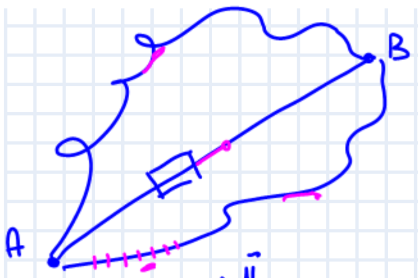
$$m\vec g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

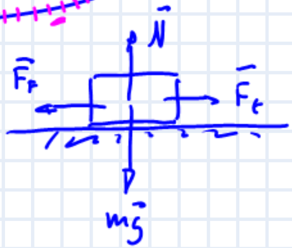
$$\boxed{W_{AB}^{\vec F} = m\vec g \cdot \vec{AB} = -mg(z_B - z_A)}$$

$$\underbrace{z_B - z_A}_{h}$$

dép. uniquement de la diff. de hauteur des points

Exemple 2 : travail de la force de frottements (sec)





$$W_{AB}^{\vec F_F} = \int_A^B -F_F\cdot\vec\tau\cdot d\vec r = \int_A^B -F_F\cdot\vec\tau\cdot dr\cdot\vec\tau$$

$$\vec\tau\cdot\vec\tau = 1$$

$$= \int_A^B -F_F\,dr$$

$$= -F_F\int_A^B dr$$

$$\vec F_F = -\mu_c\cdot N\cdot\vec\tau$$

$$= -F_F\,\vec\tau$$

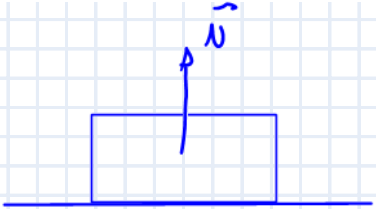
$$d\vec r = dr\cdot\vec\tau$$

$$\boxed{W_{AB}^{\vec F_F} = -F_F\cdot\ell}$$

ℓ : longueur du trajet

le travail dépend du trajet

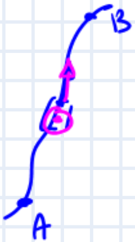
Exemple 3 : forces de réaction $\vec{N}$



$$W_{AB}^{\vec{N}} = \int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{N} \cdot dr\, \vec{\tau}$$

$$\vec{N} \cdot \vec{\tau} = 0$$

$$\boxed{W_{AB}^{\vec{N}} = 0}$$



Une force $\perp$ à la trajectoire ne travaille pas !

Puissance d'une force

Par définition, la puissance est la variation du travail W par unité de temps.

La puissance P est $P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$.

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Résumé

Le travail d'une force pour un déplacement infinitésimal d$\vec{r}$ est

$$\delta W^{\vec{F}} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Donc pour un déplacement de A à B, le travail est

$$W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B \delta W^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Travail en Joules [J] ; 1 J = 1 N·m = 1 kg·m^2·s^{-2}

La puissance P est $P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

La puissance est en Watt [W] ; 1W= 1J·s^{-1}

Puissance : ordre de grandeurs.

5-10 W : Ampoule basse consommation
20-40 W : Puissance consommée par le cerveau humain
100 W : Puissance consommée par le corps humain au repos
300-400W : Un PC
736W : Un cheval-vapeur (unité)
900 W : la puissance de sortie d'un humain en bonne santé (non-athlétique) sur les 6 premières secondes d'un sprint de 30 secondes

1 kW à 2 kW : puissance d'une bouilloire électrique domestique
12 kW : La puissance du flash d'un appareil photo amateur (12 joules délivrés en 1 milliseconde)
40 kW à 200 kW : intervalle de puissance de sortie approximative des automobiles

3 MW ($3 \cdot 10^6$W) : puissance de sortie mécanique d'une locomotive diesel
290 MW : Puissance de l'usine de Fionnay (Gde Dixence)

2 GW ($2 \cdot 10^9$W) : puissance du complexe hydro-electrique Cleuson-Dixence
18,2 GW : la puissance électrique générée du barrage des Trois Gorges en Chine

12 TW ($12 \cdot 10^{12}$W) : la puissance moyenne de la consommation énergétique mondiale
50 à 200 TW : dégagement d'énergie d'un cyclone tropical

174 PW ($174 \cdot 10^{15}$W) : Puissance du soleil reçue par la Terre

Table des matières

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{\tau}}$$

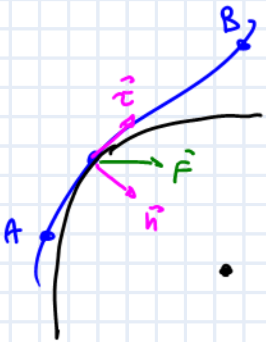
VI - 2 Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2$$

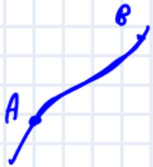
D'où sort la notion d'énergie cinétique ?

Mouvement curviligne sous l'action d'une force totale $\vec{F}_{\text{tot}}$:

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$$



$$W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_A^B m\vec{a} \cdot \vec{dr}$$



$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

$$\vec{dr} = dr \cdot \vec{\tau}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B m\left(\cancel{\frac{v^2}{\rho}\vec{n}} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}\right) \cdot dr\,\vec{\tau} = \int_A^B m\frac{dv}{dt}\,dr$$

$$\frac{dv(r(t))}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B m \frac{dv}{dt} dr = \int_A^B m \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} \cdot dr = \int_A^B m \frac{dv}{dr} v \cdot dr$$

changement de variable $r \to v$ $\quad v(r) \quad dv = \frac{dv}{dr} \cdot dr$

$$W_{AB}^{\vec{F}} = \int_{v_A}^{v_B} m\, v\, dv = m \left[\frac{1}{2} v^2\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\boxed{W_{AB}^{\vec{F}} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2}$$

$$\boxed{E_c := \frac{1}{2} m v^2}$$

énergie cinétique

$$\boxed{W_{AB}^{\vec{F}} = E_{c,B} - E_{c,A}}$$

Résumé

Par définition, **l'énergie cinétique** est :

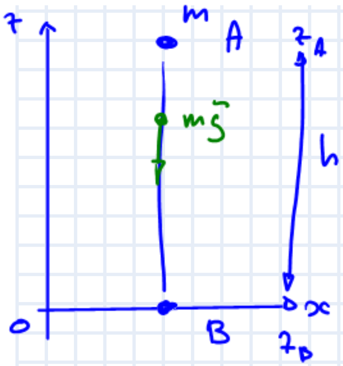
$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Si l'objet est soumis à plusieurs forces $\vec{F}_i$ entre A et B, $\vec{F}^{\text{tot}} = \sum \vec{F}_i$

$$W_{AB}^{\text{tot}} = \sum W^{\vec{F}_i} = E_{c,B} - E_{c,A}$$

Exemple

Vitesse au sol acquise par un objet lâché d'une hauteur *h* avec une vitesse nulle $v = \sqrt{2gh}$



$$W_{AB}^{m\vec{g}} = mg\,(z_A - z_B) = mg\,h$$

$$= E_{c,B} - E_{c,A}$$

$$= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$v_A = 0$

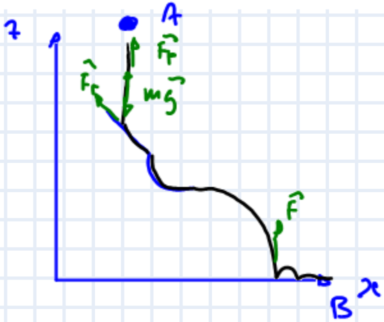
$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Table des matières

VI - 3 Energie potentielle et énergie mécanique

Exemple du travail du poids :



$$W_{AB}^{m\vec{g}} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = m\vec{g} \cdot \int_A^B d\vec{r} = m\vec{g} \cdot \vec{AB}$$

ne dép. pas de la trajectoire !

Le travail ne dépend que de A et B

(x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B)

Par définition, l'énergie potentielle $E_p^{\vec{F}}(x, y, z)$ est **une fonction des coordonnées d'espace** (x, y, z) qui est associée à la force considérée $\vec{F}$. Cette fonction **a la dimension d'une énergie** et est telle que :

$$W_{AB}^{\vec{F}} = E_{p,A}^{\vec{F}} - E_{p,B}^{\vec{F}}$$

$E_{p,A}^{\vec{F}}(x_A, y_A, z_A) - E_{p,B}^{\vec{F}}(x_B, y_B, z_B)$

pour $\vec{F}$, est-ce qu'on peut associer $E_p(x, y, z)$

oui

$W_{AB} = E_{p,A} - E_{p,B}$

ch gravité

non

$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

frott.

Énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre :

$$W_{AB}^{m\vec{g}} = m\vec{g}\cdot\vec{AB} = -m\begin{pmatrix}0\\0\\g\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix} = -mg\,(z_B - z_A)$$

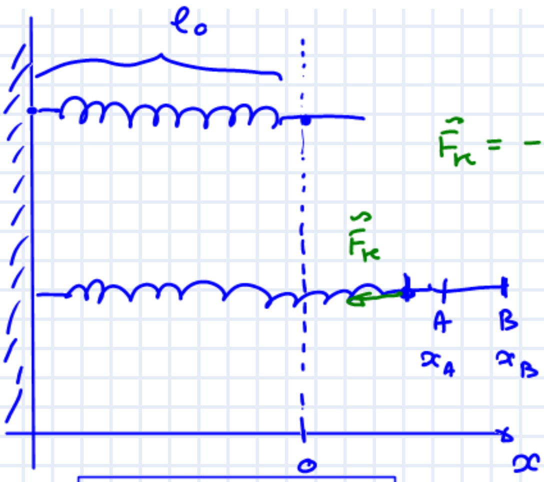
$$= mg\,z_A - mg\,z_B$$

$$\boxed{E_p^{m\vec{g}} = mg\,z}$$

$$W_{AB}^{m\vec{g}} = E_{p,A}^{m\vec{g}} - E_{p,B}^{m\vec{g}}$$

$$mg\,z_A - mg\,z_B$$

Énergie potentielle d'un ressort :



$$\vec{F}_k = -kx\,\vec{e}_x$$

$$\boxed{E_p^{\vec{F}_k} = \frac{1}{2}kx^2}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_k} = E_p^{\vec{F}_k}(x_A) - E_p^{\vec{F}_k}(x_B)$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_k} = \int_A^B -kx\,\vec{e}_x \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_k} = \int_A^B -kx\,\vec{e}_x \cdot dx \cdot \vec{e}_x$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} -kx\,dx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$= -\frac{k}{2}x_B^2 + \frac{k}{2}x_A^2$$

$$= \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

Énergie potentielle totale :

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}^i$$

Si toutes les forces $\vec{F}^i$ sont associées à un potentiel $E_p^{\vec{F}_i}$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = \sum_i W_{AB}^{\vec{F}_i} = \sum_i \left(E_{p,A}^{\vec{F}_i} - E_{p,B}^{\vec{F}_i} \right)$$

$$= \sum_i E_{p,A}^{\vec{F}_i} - \sum_i E_{p,B}^{\vec{F}_i}$$

$$= E_{p,A}^{tot} - E_{p,B}^{tot}$$

$$\boxed{E_p^{tot} = \sum_i E_p^{\vec{F}_i}}$$

Energie mécanique

On définit l'énergie mécanique E_m par

$$E_m = E_p + E_c$$

1) $W_{AB}^{\vec{F}} = E_{c,B} - E_{c,A}$

2) $W_{AB}^{\vec{F}} = E_{p,A}^{\vec{F}} - E_{p,B}^{\vec{F}}$ (forces associées à un potentiel)

$E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$

$\underbrace{E_{c,B} + E_{p,B}}_{} = E_{c,A} + E_{p,A}$

$$\boxed{E_{m,B} = E_{m,A}}$$

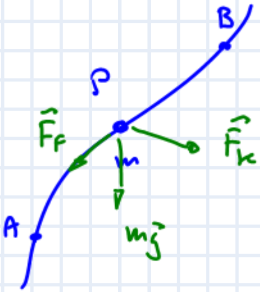
grandeur conservée

Forces "conservatives"

elles conservent l'énergie mécanique

Frottements :

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}^i = \sum_i \vec{F}^{c,i} + \sum_i \vec{F}^i_{fr}$$



$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = W_{AB}^{\vec{F}_f} + W_{AB}^{\vec{F}_c}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_f} = -F_F \cdot \ell$$ ℓ : longueur du trajet

$$W_{AB}^{\vec{F}_c} = E_{P,A}^{\vec{F}_c} - E_{P,B}^{\vec{F}_c}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = -F_F \cdot \ell + E_{P,A}^{\vec{F}_c} - E_{P,B}^{\vec{F}_c} = E_{c,B} - E_{c,A}$$

$$\underbrace{E_{c,B} + E_{P,B}^{\vec{F}_c}} = \underbrace{E_{c,A} + E_{P,A}^{\vec{F}_c}} - F_F \cdot \ell$$

$$\boxed{\underline{E_{m,B}} = E_{m,A} - F_F \cdot \ell}$$

dissipation d'énergie

Récapitulatif :

Pour certaines forces, on peut trouver la fonction énergie potentielle telle que $W_{AB}^{\vec{F}} = E_{p,A} - E_{p,B}$. Ces forces sont dites **"conservatives"** car elles **conservent l'énergie mécanique**.

Si plusieurs forces conservatives entrent en jeu $E_p^{\text{tot}} = \sum E_p^i$

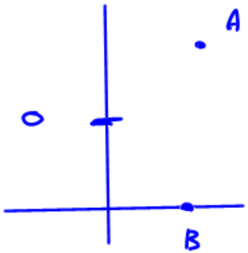
S'il y a plusieurs forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ...

$$W_{AB}^{\text{tot}} = W_{AB}^{\vec{F}_1} + W_{AB}^{\vec{F}_2} + ... = E_{c,B} - E_{c,A}$$

Pour les $\vec{F}_i$ conservatives $W_{AB}^{\vec{F}_i} = E_{p,A}^i - E_{p,B}^i$

Pour les $\vec{F}_j$ non conservatives $W_{AB}^{\vec{F}_j} = \int_A^B \vec{F}_j \cdot d\vec{r}$

Énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre :



$$mgz$$

12.3

Énergie potentielle d'un ressort :

$$\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p^{mg} = mgz + cte$$

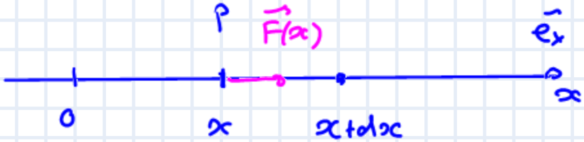
$$W_{AB}^{mg} = (mgz_A + cte) - (mgz_B + cte)$$

L'énergie potentielle est définie **à une constante près (l'endroit où on prend le référence)**. Ça n'est pas un problème car **seule la différence d'énergie potentielle a un sens physique !**

Table des matières

VI - 4 Lien entre force et énergie potentielle

Cas à une dimension selon (Ox), pour une force conservative :



$$E_p(x)$$

$$\vec{F}(x) = F(x) \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$$

$$\delta W^F := \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(x) \cdot \vec{e}_x \, dx \cdot \vec{e}_x = F(x)\, dx$$

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x$$

$$= E_p(x) - E_p(x+dx) = F(x)\, dx$$

$$F(x) = \lim_{dx \to 0} - \frac{E_p(x+dx) - E_p(x)}{dx} = - \frac{d\,E_p(x)}{dx}$$

$$\boxed{F(x) = - \frac{d\,E_p(x)}{dx}}$$

Cas à 3 dimensions : $E_p(x, y, z)$.

$$\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x} = \frac{d}{dx} E_p(x, \overset{\text{fixés}}{y, z})$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} E_p(x,y,z) = \frac{d}{dy} E_p(x, y, z)$$

$$E_p(x,y,z) = mgz$$

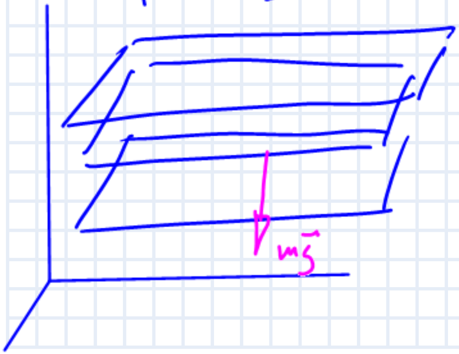
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{vmatrix} = -\vec{\nabla} E_p$$

gradient

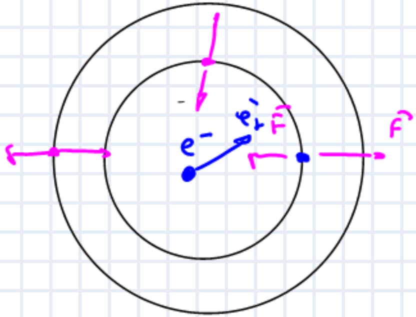
Surfaces équipotentielles :

$$E_p^{mg} = mgz$$



$$E_p(\overset{r^2}{x^2+y^2+z^2})$$

$$-\nabla E_p \sim \vec{e_r}$$



Une force est conservative si et seulement si :

Il existe une *fonction* $E_p(x, y, z)$ telle que $W_{AB}^{\vec{F}} = E_p(A) - E_p(B)$

ou

Il existe une *fonction* $E_p(x, y, z)$ telle que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

ou

Le travail de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi

ou

Le travail de $\vec{F}$ est nul sur tout chemin fermé

ou

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$W_{AB} = W_{AA} = E_{p,A} - E_{p,A} = 0$

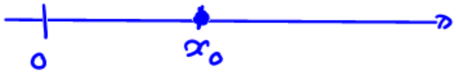
Table des matières

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

$$F = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} E_p(x)}_{0}$$

$F = 0$

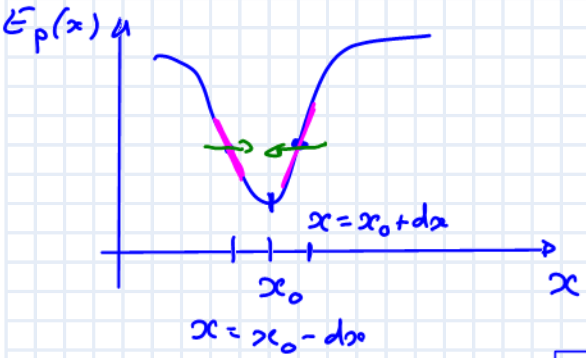
VI - 5 Energie potentielle et équilibre



Si à la position x_0, la dérivée $\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$, alors $F(x_0) = 0$.

Pas de force appliquée sur l'objet. Si l'objet est immobile en x_0, il y reste. C'est une position d'équilibre. → extremum pour $E_p(x)$

Cas 1 : minimum



- $x > x_0$

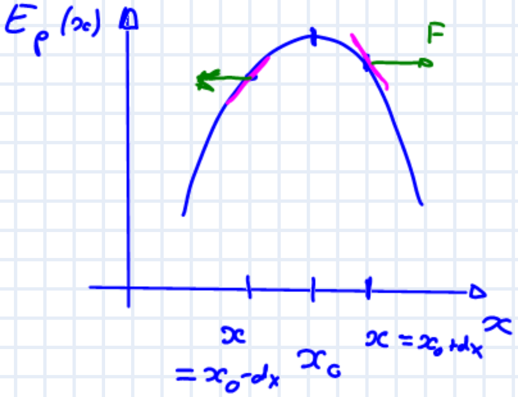
  $\frac{\partial E_p}{\partial x} > 0$ $F < 0$

- $x < x_0$

  $\frac{\partial E_p}{\partial x} < 0$ $F > 0$

$\boxed{\text{équilibre stable}}$

Cas 2 : maximum



- $x > x_0$

$\frac{\partial E_p}{\partial x} < 0 \qquad F > 0$

- $x < x_0$

$\frac{\partial E_p}{\partial x} > 0 \qquad F < 0$

$\boxed{\text{l'équilibre est instable}}$