II. Référentiel accélérés

Dr. Yves Revaz

2025

Plan du cours

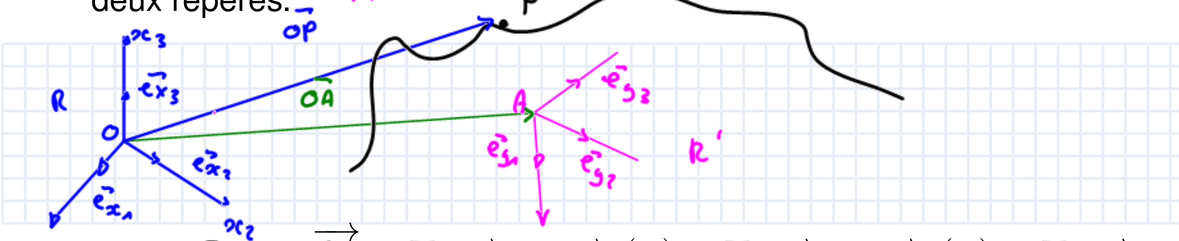
Table des matières

1. Introduction et notation

Soit un référentiel $\mathcal{R}$ fixe, muni du repère cartésien $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

Soit un référentiel $\mathcal{R}'$ muni du repère cartésien $(A, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ en mouvement dans $\mathcal{R}$.

On notera $\vec{e}_{x_i}$ respectivement $\vec{e}_{y_i}$ les vecteurs unitaires de ces deux repères. $i = 1, 2, 3$



x_1

Dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_{x_i}$ $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_{x_i}$ $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_{x_i}$

$x_1 \vec{e}_{x_1} + x_2 \vec{e}_{x_2} + x_3 \vec{e}_{x_3}$

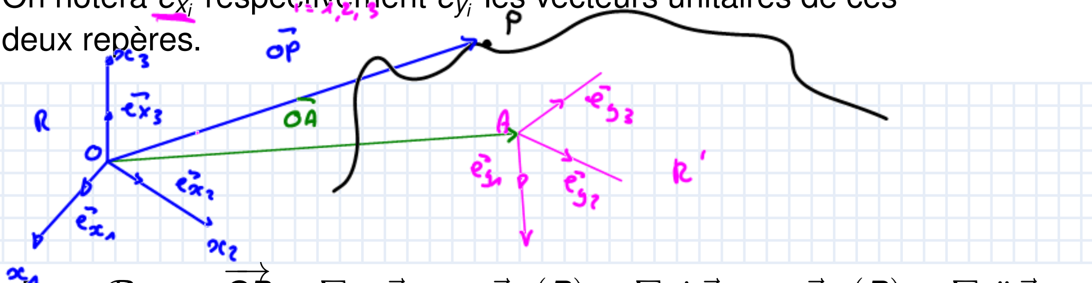
$x_1(t)$

1. Introduction et notation

Soit un référentiel $\mathcal{R}$ fixe, muni du repère cartésien $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

Soit un référentiel $\mathcal{R}'$ muni du repère cartésien $(A, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ en mouvement dans $\mathcal{R}$.

On notera $\vec{e}_{x_i}$ respectivement $\vec{e}_{y_i}$ les vecteurs unitaires de ces deux repères.



Dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_{x_i}$ $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_{x_i}$ $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_{x_i}$

Dans $\mathcal{R}'$: $\overrightarrow{AP} = \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}$ $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i}$ $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i}$

$\vec{\omega}(t)$

On peut séparer le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ en deux composantes : **une rotation et une translation**.

La translation donne le mouvement de A dans $\mathcal{R}$ et la rotation la rotation des axes (y_j) par rapport aux axes (x_i). On appelle $\vec{\omega}$ le vecteur rotation.

Les vecteurs $\vec{e}_{y_i}$ changent dans $\mathcal{R}$. On obtient leur dérivée par :

$i = 1, 2, 3$

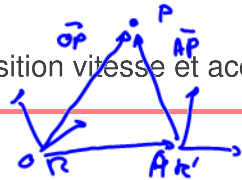
$j \quad i \quad j = 1, 2, 3$

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_{y_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{y_j} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_j}}$$

$\vec{v}_R(A)$

$\vec{OP} \leftarrow \vec{AP} \qquad \vec{v}_R(P) \leftrightarrow \vec{v}_{R'}(P(t)) \qquad \vec{a}_R(P) \leftrightarrow \vec{a}_{R'}(P)$

Table des matières



2. Position, vitesse et accélération

P en mvt dans R' (A, y_1, y_2, y_3) R' en mvt dans R (O, x_1, x_2, x_3)

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\boxed{\vec r_R(P) = \vec{OA} + \vec r_{R'}(P)}$$

$$\vec v_R(P) := \frac{d}{dt}\left(\vec r_R(P)\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{OA} + \vec r_{R'}(P)\right) = \frac{d}{dt}\vec{OA} + \frac{d}{dt}\vec r_{R'}(P)$$

$$= \vec v_R(A) + \frac{d}{dt}\left(\sum y_i \vec e_{y_i}\right) = \vec v_R(A) + \sum \frac{d}{dt}\left(y_i \vec e_{y_i}\right)$$

$$= \vec v_R(A) + \sum\left(\dot y_i \vec e_{y_i} + y_i \dot{\vec e}_{y_i}\right) = \vec v_R(A) + \sum \dot y_i \vec e_{y_i} + \sum y_i \dot{\vec e}_{y_i}$$

$$= \vec v_R(A) + \vec v_{R'}(P) + \sum y_i \cdot \left(\vec\omega \times \vec e_{y_i}\right)$$

$$= \vec v_R(A) + \vec v_{R'}(P) + \vec\omega \times \sum y_i \cdot \vec e_{y_i}$$

$$\boxed{\vec v_R(P) = \vec v_R(A) + \vec v_{R'}(P) + \vec\omega \times \vec{AP}}$$

$$\vec\omega(t)$$

$$\vec a_R(P) = \frac{d}{dt}\left(\vec v_R(P)\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec v_R(A) + \vec v_{R'}(P) + \vec\omega \times \vec{AP}\right)$$

$$= \vec a_R(A) + \frac{d}{dt}\left(\sum \dot y_i \vec e_{y_i}\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec\omega \times \sum y_i \vec e_{y_i}\right)$$

$$= \vec a_R(A) + \sum \frac{d}{dt}\left(\dot y_i \vec e_{y_i}\right) + \dot{\vec\omega} \times \sum y_i \vec e_{y_i} + \vec\omega \times \sum \frac{d}{dt}\left(y_i \vec e_{y_i}\right)$$

$$= \vec a_R(A) + \sum\left(\ddot y_i \vec e_{y_i} + \dot y_i \dot{\vec e}_{y_i}\right) + \dot{\vec\omega} \times \vec{AP} + \vec\omega \times \sum\left(\dot y_i \vec e_{y_i} + y_i \dot{\vec e}_{y_i}\right)$$

$$= \vec a_R(A) + \sum \ddot y_i \vec e_{y_i} + \sum \dot y_i \left(\vec\omega \times \vec e_{y_i}\right) + \dot{\vec\omega} \times \vec{AP} + \vec\omega \times \sum \dot y_i \vec e_{y_i} + \vec\omega \times \sum y_i \dot{\vec e}_{y_i}$$

$$= \vec a_R(A) + \vec a_{R'}(P) + \vec\omega \times \sum \dot y_i \vec e_{y_i} + \dot{\vec\omega} \times \vec{AP} + \vec\omega \times \vec v_{R'}(P) + \vec\omega \times \sum y_i \left(\vec\omega \times \vec e_{y_i}\right)$$

$$= \vec a_R(A) + \vec a_{R'}(P) + \vec\omega \times \vec v_{R'}(P) + \dot{\vec\omega} \times \vec{AP} + \vec\omega \times \vec v_{R'}(P) + \vec\omega \times \left(\vec\omega \times \sum y_i \vec e_{y_i}\right)$$

$$\boxed{\vec a_R(P) = \vec a_R(A) + \vec a_{R'}(P) + 2\,\vec\omega \times \vec v_{R'}(P) + \dot{\vec\omega} \times \vec{AP} + \vec\omega \times \left(\vec\omega \times \underbrace{\vec{AP}}_{\vec r_{R'}(P)}\right)}$$

Résumé :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

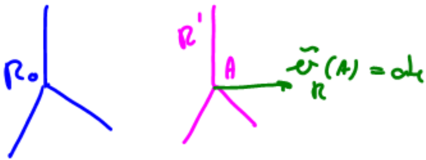
Table des matières

3. Analyse et cas particuliers

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$

$\vec{v}_R(A) = \text{cte} \qquad \vec{a}_R(A) = \vec{0}$

$\vec{\omega} = \vec{0} \qquad \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$

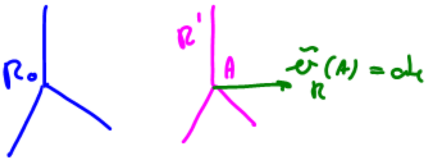


3. Analyse et cas particuliers

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$

$\vec{v}_{R}(A) = \vec{cte}$ $\quad \vec{a}_{R}(A) = \vec{0}$

$\vec{\omega} = \vec{0}$ $\quad \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$



$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \cancel{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}} + \cancel{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})} + \cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}$$

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \qquad (1)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) \qquad (2)$$

(1) composition des vitesses

(2) R' et en déplacement uniforme dans R $\qquad \vec{F} \sim \vec{a}$

$\Rightarrow$ R' est aussi un référentiel inertiel galiléen

Les lois de Newton sont valables

Cas particulier 2 :

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$

$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{x_3}$ $\quad \dot{\vec{\omega}} = 0$

$\vec{v}_{R'}(P) = 0$ $\quad \vec{a}_{R'}(P) = 0$

Cas particulier 2 :

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $\underline{A = O}$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$

$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{x_3}$ $\dot{\omega} = 0$ $\vec{OA} = 0$

$\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = 0$ $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = 0$ $\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = 0$

$\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = 0$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)} + \cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)} + \cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + \cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}$$

Cas particulier 2 :

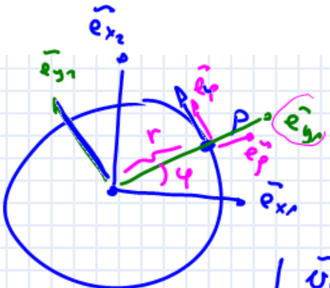
$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$
P a donc un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$\vec{e}_{y_3} = \vec{e}_{x_3}$

accélération centripète

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$



$$\vec{\omega} \times \vec{OP} = \omega \vec{e}_{y_3} \times r\, \vec{e}_{y_1} = \omega \cdot r\, \vec{e}_{y_2}$$

$$\omega \vec{e}_{y_3} \times \left(\omega \vec{e}_{y_3} \times r\, \vec{e}_{y_1} \right) = \omega \vec{e}_{y_3} \times \left(\omega r\, \vec{e}_{y_2} \right)$$

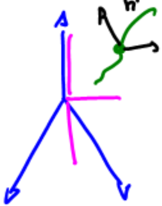
$$= -\omega^2 r\, \vec{e}_{y_1}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_R(P) = \omega r\, \vec{e}_{\varphi} \\ \vec{a}_R(P) = -\omega^2 r\, \vec{e}_{\rho} \end{cases}$$

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

$\vec{\omega} = cte \qquad \dot{\vec{\omega}} = 0$



$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)} + \underline{\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underline{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)} + \cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}} + \underline{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})} + \underline{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}$$

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

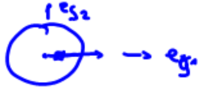
vitesse relative

vitesse d'entrainement

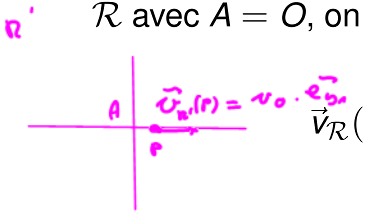
$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'}}_{\text{accélérat relativ}}(P) + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})}_{\text{accélération centripète}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{accélération de Coriolis}}$$

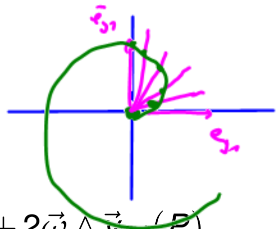
1. $\vec{\omega} \neq 0$
2. P : $\vec{v}_{R'}(P) = 0$
3. $\vec{v}_{R'}(P) \parallel \vec{\omega}$



Cas particulier 4 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$, on suppose : $\vec v_{\mathcal{R}'}(P) = v_0 \cdot \vec{e}_{y1}$.

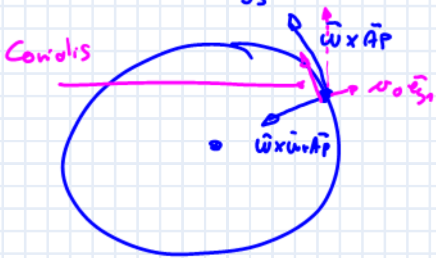


$$\vec v_{\mathcal{R}}(P) = \vec v_{\mathcal{R}}(A) + \underbrace{\vec v_{\mathcal{R}'}(P)}_{v_0 \vec e_{y1}} + \underbrace{\vec\omega \wedge \overrightarrow{AP}}_{\omega r(t) \vec e_{y2}}$$



$$\vec a_{\mathcal{R}}(P) = \vec a_{\mathcal{R}'}(P) + \vec a_{\mathcal{R}}(A) + \cancel{\dot{\vec\omega} \wedge \overrightarrow{AP}} + \underbrace{\vec\omega \wedge (\vec\omega \wedge \overrightarrow{AP})}_{-\omega^2 r \vec e_{y1}} + \underbrace{2\vec\omega \wedge \vec v_{\mathcal{R}'}(P)}$$

$$2\hat\omega \times \vec v_{R'}(P) = 2\omega \vec e_{y3} \times v_0 \vec e_{y1} = 2\omega v_0 \vec e_{y2}$$



Nomenclature dans le cas général

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{acc relative}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}_{\text{accel. d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{Coriolis}}$$