I - Cinématique

Dr. Yves Revaz

2025

Plan du cours

Table des matières

Cinématique : **description des mouvements.** Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

Cinématique : **description des mouvements.** Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

Référentiel : **système de référence** par rapport auquel on mesure le mouvement.

Cinématique : **description des mouvements.** Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

Référentiel : **système de référence** par rapport auquel on mesure le mouvement.

Origine du référentiel : un point particulier **fixe** dans le référentiel par rapport auquel on définira la position d’un objet.

Cinématique : **description des mouvements.** Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

Référentiel : **système de référence** par rapport auquel on mesure le mouvement.

Origine du référentiel : un point particulier **fixe** dans le référentiel par rapport auquel on définira la position d'un objet.

Repère : systèmes de vecteurs unitaires formant un **trièdre orthonormé direct**, par exemple $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui sert à décomposer mathématiquement le mouvement.
Attention ! : (i) Le trièdre orthonormé direct n'est pas forcément fixe dans le référentiel (coord. cylindrique, sphériques). (ii) Dans un même référentiel, on peut avoir plusieurs repères.

Cinématique : **description des mouvements.** Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

Référentiel : **système de référence** par rapport auquel on mesure le mouvement.

Origine du référentiel : un point particulier **fixe** dans le référentiel par rapport auquel on définira la position d'un objet.

Repère : systèmes de vecteurs unitaires formant un **trièdre orthonormé direct**, par exemple $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui sert à décomposer mathématiquement le mouvement.
Attention ! : (i) Le trièdre orthonormé direct n'est pas forcément fixe dans le référentiel (coord. cylindrique, sphériques). (ii) Dans un même référentiel, on peut avoir plusieurs repères.

Coordonnées : Ensemble des grandeurs qui permettent de repérer la position d'un point. Exemple : coordonnées cartésiennes ; coordonnées sphériques ; coordonnées GPS...

Table des matières

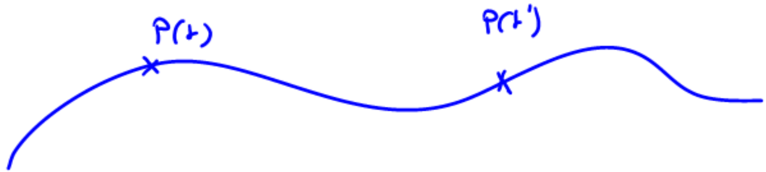
I - 2 Trajectoire, vitesse, accélération

Pour l'instant, l'objet étudié est considéré comme un *point matériel* *P*.

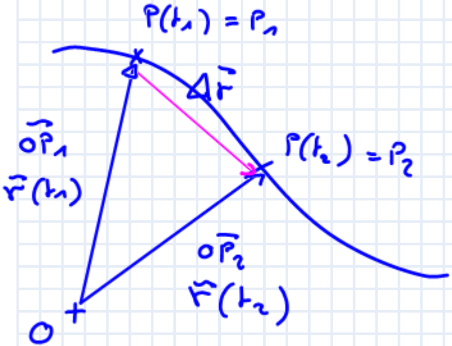
But : Décrire le mouvement de cet objet. Plus tard, prédire sa position.

Nous utiliserons pour ce faire sa position, sa vitesse et son accélération, mais aussi sa trajectoire.

La trajectoire est l'ensemble des points de l'espace par les quels passe cet objet (point) au cours du temps.



La position se mesure par rapport à l'origine fixe du référentiel (généralement O. On repère ce point par un *vecteur position* $\vec{r}(t) = \vec{OP}$.

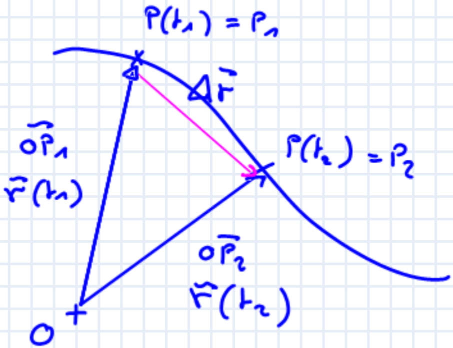


$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Vitesse instantanée



$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt}$$

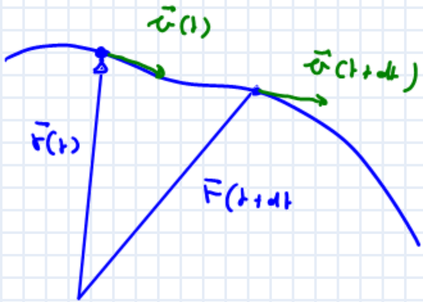
$$= \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

$\Delta\vec{r}$ colinéaire à la traj

$\vec{v} \sim \Delta\vec{r}$ ||

$\vec{v}$ est tangente à la trajectoire

Accélération instantanée



$$\vec{a}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Résumé

$$\text{position : } \vec{r}(t) = \vec{OP}$$

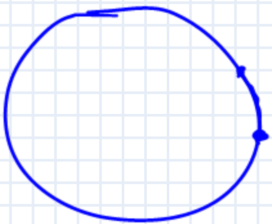
$$\text{vitesse : } \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

$$\text{accélération : } \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

La vitesse **scalaire** est la norme du vecteur vitesse, $v = |\vec{v}|$

L'accélération **scalaire** est la norme du vecteur accélération
$a = |\vec{a}|$

$|\vec{a}| = a \cancel{\neq \dot{v} \neq} \ddot{r}$



$$\vec{v} \to \frac{d}{dt}\vec{v} \to \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$|\vec{v}|$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}|\vec{v}| = 0$$

Système de coordonnées

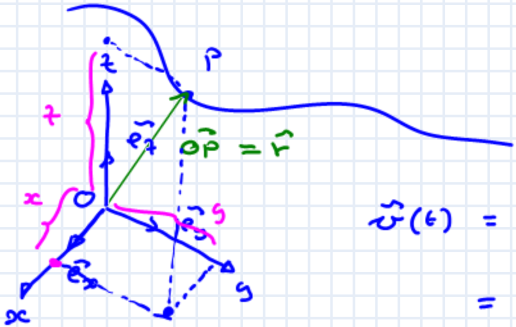
Il faut maintenant **faire le choix du système de coordonnées.** Pour chaque système de coordonnées, un repère permet d'obtenir les composantes des vecteurs. Nous utiliserons uniquement des systèmes de coordonnées qui sont liés à un **repère orthonormé direct.**

Dans le cours (et dans la suite des études) :

- coordonnées cartésiennes
- coordonnées polaires
- coordonnées curvilignes (repère de Frenet)
- coordonnées cylindriques
- coordonnées sphériques
- (coordonnées elliptiques)

Table des matières

3 - Coordonnées cartésiennes



$P(x, y, z)$

$$\vec{r} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\vec{r}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \right)$$

$$= \frac{d}{dt}x\,\vec{e}_x + \frac{d}{dt}y\,\vec{e}_y + \frac{d}{dt}z\,\vec{e}_z$$

$$= \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

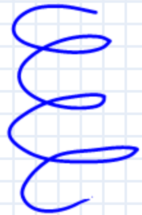
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z\right)$$

$$= \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix}$$

$$v_x = \dot{x}$$



<u>Exemple</u>

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ k t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ k \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résumé

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

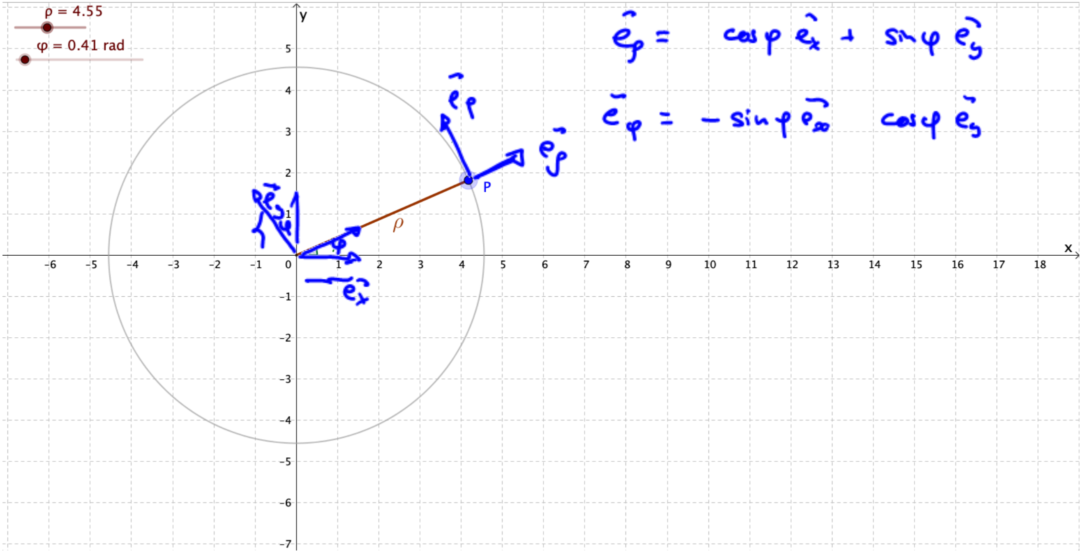
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

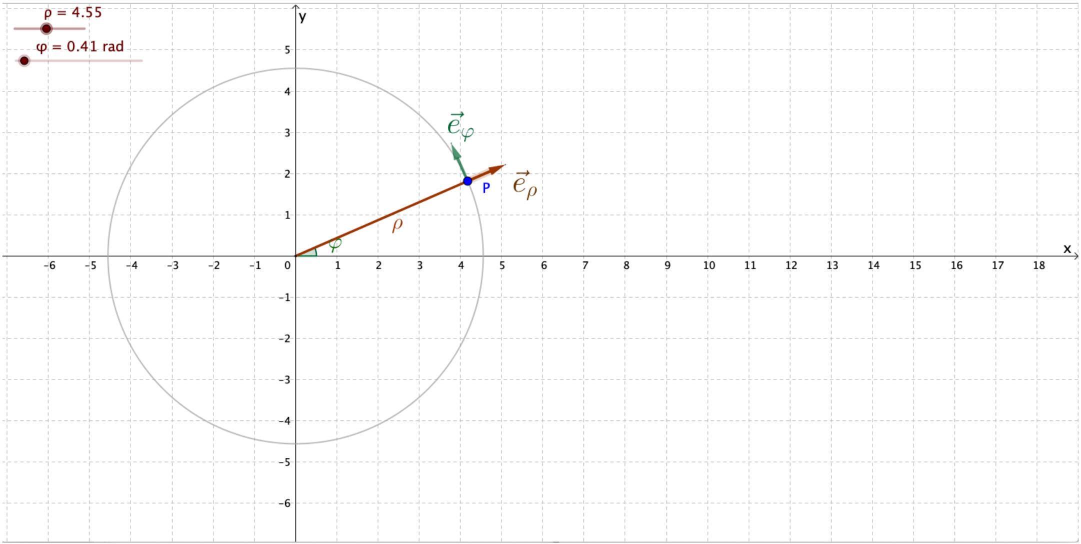
$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Table des matières

4 - Coordonnées polaires




ρ = 4.55
φ = 0.41 rad
y
x
P
$\vec{e}_\varphi$
$\vec{e}_\rho$
ρ
φ

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d}{dt}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)$$

$$= -\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y$$

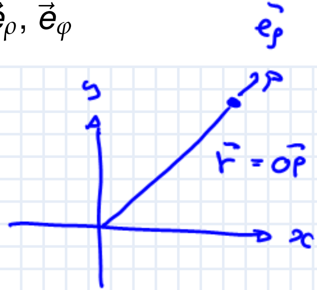
$$= \dot{\varphi}\left(\underbrace{-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y}_{\vec{e}_\varphi}\right) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d}{dt}\left(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\right)$$

$$= \left(-\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y\right)$$

$$= -\dot{\varphi}\left(\underbrace{\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y}_{\vec{e}_\rho}\right) = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

Expression de $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, en fonction de ρ, φ, $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$



$$\vec{r} = \rho\, \vec{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(\rho\, \vec{e}_\rho)$$

$$\vec{v} = \dot\rho\, \vec{e}_\rho + \rho\cdot\dot\varphi\, \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \dot\rho \\ \rho\dot\varphi \end{pmatrix}$$

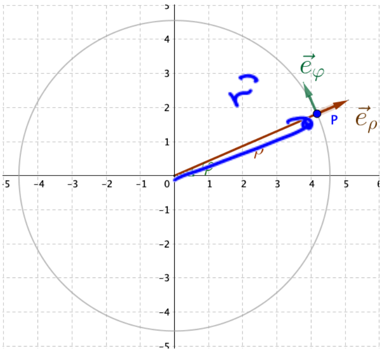
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\dot\rho\, \vec{e}_\rho + \rho\cdot\dot\varphi\, \vec{e}_\varphi\right)$$

$$= \ddot\rho\, \vec{e}_\rho + \dot\rho\, \dot{\vec{e}}_\rho + \dot\rho\,\dot\varphi\, \vec{e}_\varphi + \rho\,\ddot\varphi\, \vec{e}_\varphi + \rho\,\dot\varphi\, \dot{\vec{e}}_\varphi$$

$$= \cancel{\ddot\rho\, \vec{e}_\rho} + \dot\rho\,\dot\varphi\, \vec{e}_\varphi + \dot\rho\,\dot\varphi\, \vec{e}_\varphi + \rho\,\ddot\varphi\, \vec{e}_\varphi - \rho\,\cancel{\dot\varphi^2\, \vec{e}_\rho}$$

$$\vec{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\, \vec{e}_\rho + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\, \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 \\ 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi \end{pmatrix}$$

Résumé



$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot\varphi\vec{e}_\rho$$

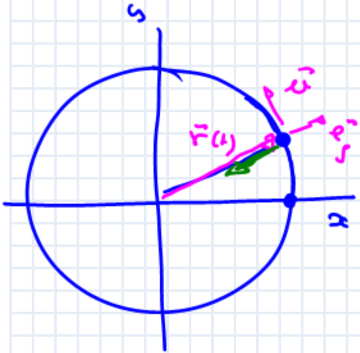
$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} \dot\rho \\ \rho\dot\varphi \end{pmatrix}$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 \\ \rho\ddot\varphi - 2\dot\rho\,\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho \\ \vec{v} &= \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{a} &= (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Exemple : mouvement circulaire uniforme



$R = cte \qquad \rho = R \qquad \dot{\rho} = 0 \quad \ddot{\rho} = 0$

uniforme $\quad \varphi(t) = \omega \cdot t \qquad \omega = cte \quad \frac{[rad]}{[s]}$

$\dot{\varphi} = \omega$ ↳ pulsation

$\ddot{\varphi} = 0$

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho = R \vec{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \cancel{\dot{\rho} \vec{e}_\rho} + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = R \omega \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \cancel{\ddot{\varphi}} + \cancel{2 \dot{\rho} \dot{\varphi}}) \vec{e}_\varphi = -R \omega^2 \vec{e}_\rho$$

acc. centripète

$|\vec{v}| = R\omega \qquad \omega = \frac{v}{R}$

$|\vec{a}| = R\omega^2$

$$\boxed{a = R \frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}}$$

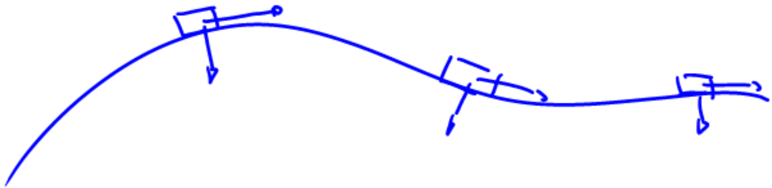
$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ fréquence

Table des matières

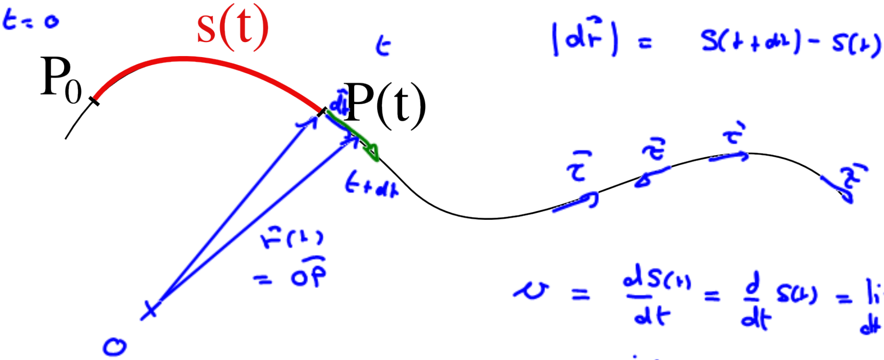
5 - Coordonnées curviligne (repère de Frenet)

Cas général

Point de vue de l'automobiliste (point matériel) sur une route de plaine (trajectoire).



s(t) : abscisse curviligne



$$|d\vec{r}| = s(t+dt) - s(t) = ds$$

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}s(t) = \lim_{dt\to 0}\frac{s(t+dt)-s(t)}{dt}$$

$$= \dot{s}(t)$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\boxed{\vec{v} = v\cdot\vec{\tau}} = v\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \vec{v}$$

Résumé

$s(t)$ mesure la *longueur* parcourue le long de la trajectoire

la vitesse *scalaire* est

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

la vitesse *vectorielle* est

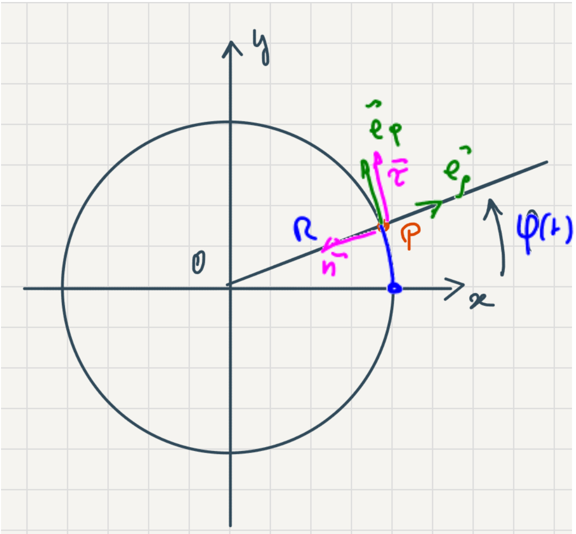
$$\underline{\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}}$$

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{v}}{v}$$

avec $\vec{\tau}$ vecteur *unitaire tangent à la trajectoire pointant dans la direction du mouvement* au point considéré.

$\bar{v}$ $\bar{a}$

Cas d'un mouvement circulaire quelconque, trajectoire de rayon R



$\rho = R$

$\dot\rho = 0$

$\ddot\rho = 0$

$s(t) = \varphi(t) \cdot R$

$v(t) = R\dot\varphi$

$\vec{v} = \cancel{\dot\rho \vec{e}_\rho} + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi$

$\vec{a} = (\cancel{\ddot\rho} - \rho\dot\varphi^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot\varphi + \cancel{2\dot\rho\dot\varphi})\vec{e}_\varphi$

$\vec{v} = R\dot\varphi\vec{e}_\varphi = v\vec{\tau}$ $\quad \vec{e}_\varphi = \vec{\tau}$

$\vec{a} = -R\dot\varphi^2\vec{e}_\rho + \rho\ddot\varphi\vec{e}_\varphi$

$\vec{n}$ unitaire et $\perp$ $\vec{\tau}$

$\vec{n} = -\vec{e}_\rho$

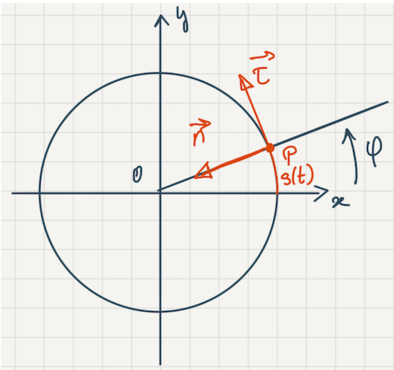
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= v\vec{\tau}\\ \vec{a} &= +R\dot\varphi^2\vec{n} + \rho\ddot\varphi\vec{\tau}\end{aligned}}$$

$\vec{v} = v\vec{\tau}$

$\vec{a} = R\dot{\varphi}^2\vec{n} + R\ddot{\varphi}\vec{\tau}$

$v = R\dot{\varphi} \qquad \dot{\varphi} = \frac{v}{R} \qquad \ddot{\varphi} = \frac{d}{dt}v\cdot\frac{1}{R}$

$\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ pointant vers le centre du cercle, tous deux unitaires.



$\vec{a} = \cancel{R}\frac{v^2}{R^{\cancel{2}}}\vec{n} + \cancel{R}\frac{d}{dt}v\frac{1}{\cancel{R}}\vec{\tau}$

$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n} + \frac{d}{dt}v\,\vec{\tau}$

$$
\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= v(t)\vec{\tau} \\
\vec{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \\
v(t) &= R\dot{\varphi}(t) = R\omega
\end{aligned}
$$

$\dot{\varphi} = \omega(t)$ *vitesse angulaire* en rad·s^{-1} $\dot{\omega} = \alpha(t)$ *accélération angulaire* en rad·s^{-2}.

Mouvement circulaire uniforme

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \qquad\qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} = \mathrm{cte}$$

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

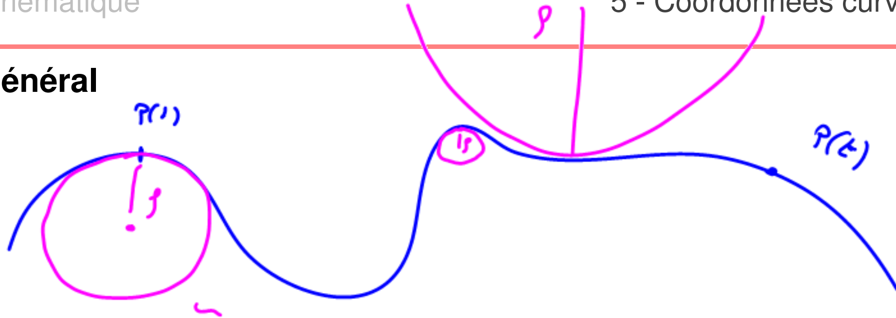
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \qquad\qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} = \text{cte}$$

ω *pulsation*. $\omega = 2\pi f$ avec f *fréquence* (en tours/s)

Cas général



Soit le **cercle osculateur** à la trajectoire au point considéré. Il a un rayon ρ.
Soient $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ pointant vers le centre du cercle osculateur, tous deux unitaires.

$$\left\{\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v(t)\vec{\tau} \\ \vec{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \end{aligned}\right.$$

R

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

La composante selon $\vec{\tau}$ est l'accélération tangentielle
$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$.

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

La composante selon $\vec{\tau}$ est l'accélération tangentielle
$\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$.

La composante selon $\vec{n}$ est l'accélération normale ou centripète
$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$.

La composante selon $\vec{\tau}$ est l'accélération tangentielle
$\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$.

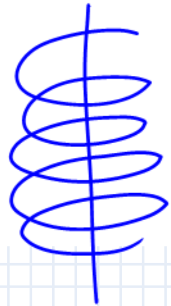
La composante selon $\vec{n}$ est l'accélération normale ou centripète
$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$.

- l'accélération tangentielle provoque **une variation de la vitesse scalaire**
- l'accélération normale provoque **une variation de la *direction* de la vitesse**.

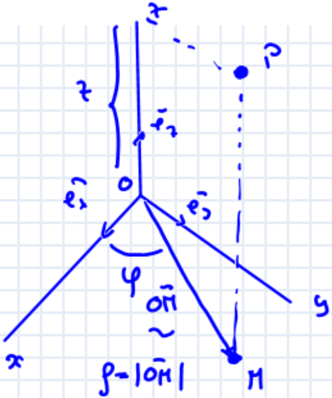
Table des matières

6 - Coordonnées cylindriques

Adaptées pour certains mouvements ou certaines symétries.



Coordonnées polaires pour (x, y) + axe z.



$P(x, y, z)$

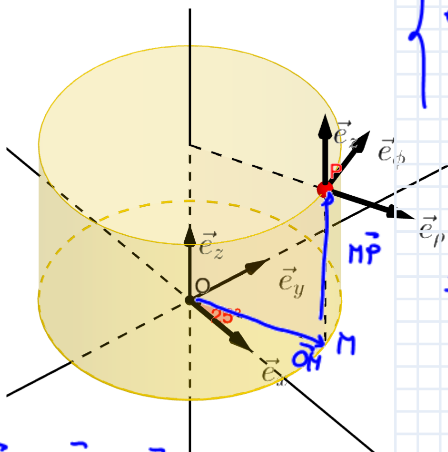
$P(\rho, \varphi, z)$

$\rho \in [0, \infty[$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

$z \in]-\infty, \infty[$

$\vec{e}_\rho \quad \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_z$



$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi \, \vec{e}_x + \sin\varphi \, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \, \vec{e}_x + \cos\varphi \, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \, \vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \, \vec{e}_\rho \qquad \dot{\vec{e}}_z = 0$$

$$\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$$
$$= \rho \, \vec{e}_\rho + z \, \vec{e}_z$$

Expression de $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, en fonction de ρ, φ, z, $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\left(\rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z\right)$$

$$= \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\,\vec{e}_z + \cancel{z\,\dot{\vec{e}}_z}$$

$$= (\dot{\rho} + \rho\dot{\varphi})\,\vec{e}_\rho + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \ldots$$

$z(t) = 0$

$\dot{z}(t) = 0$

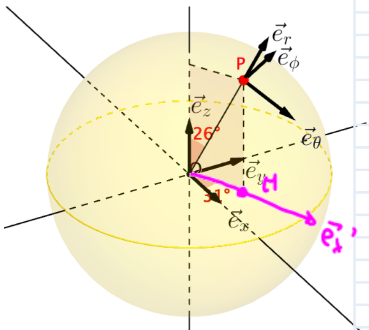
$\ddot{z}(t) = 0$

Résumé

$$\left\{\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \\
\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z
\end{aligned}\right.$$

Table des matières

7 Coordonnées sphériques



$\vec{e}_s\,' = \vec{OM}$

$P(x, y, z)$

$P(r, \varphi, \theta)$

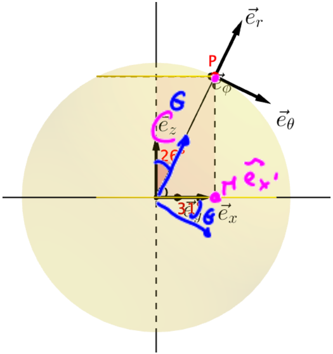
$r \in [0, \infty[\quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad \theta \in [0, \pi]$

$\vec{e}_\rho \ (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$\vec{e}_\varphi \ (\quad '' \quad)$

$\vec{e}_\theta \ (\quad '' \quad)$

dans le “plan de la porte”$(x' - z)$

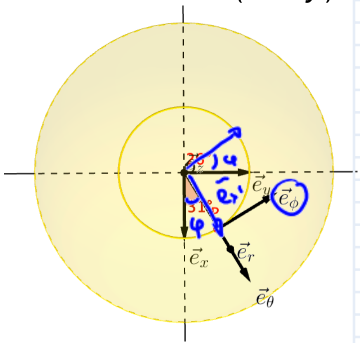


$$\vec{e}_r = \cos\theta \, \vec{e}_z + \sin\theta \, \vec{e}_{x'}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \, \vec{e}_z \quad \cos\theta \, \vec{e}_{x'}$$

$\phi = \varphi$

vue de dessus ($x - y$)



$$\boxed{\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y}$$

$$\vec{e}_{r'} = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_{r'}$$

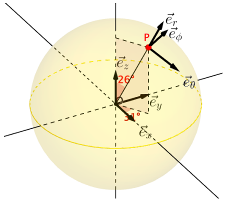
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta\,\vec{e}_{r'}$$

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z}$$



Cartesien $\rightarrow$ sphérique :

$$\vec{e}_r \left|\begin{array}{l} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{array}\right. \qquad \vec{e}_\theta \left|\begin{array}{l} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{array}\right. \qquad \vec{e}_\varphi \left|\begin{array}{l} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta\,\dot\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \cos\theta\,\dot\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi\,\dot\varphi \\ -\sin\theta\,\dot\theta \end{pmatrix} = \dot\theta \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\theta} + \dot\varphi\sin\theta \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi}$$

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot\theta\,\vec{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

On procède de la même manière pour $\dot{\vec{e}}_\theta$ et $\dot{\vec{e}}_\varphi$.

Au final on obtient :

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \quad (1)$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \quad (2)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta \quad (3)$$

Expression de $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, en fonction de r, φ, θ, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_\theta$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot\theta\vec{e}_\theta + \dot\varphi \sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{OP} = \vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r}) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot r\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

$$= \dot r\vec{e}_r + r(\dot\theta\vec{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi)$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot r\vec{e}_r + r\dot\theta\vec{e}_\theta + r\dot\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\dot r\vec{e}_r + r\dot\theta\vec{e}_\theta + r\dot\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= \ddot r\vec{e}_r + \dot r\dot{\vec{e}}_r + \dot r\dot\theta\vec{e}_\theta + r\ddot\theta\vec{e}_\theta + r\dot\theta\dot{\vec{e}}_\theta + \dot r\dot\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$+ r\ddot\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot\varphi\cos\theta\dot\theta\vec{e}_\varphi + r\dot\varphi\sin\theta\dot{\vec{e}}_\varphi$$

Position, vitesse, accélération :

$r = \text{ct}$
$\dot{r} = 0$
$\ddot{r} = 0$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \cancel{\dot{r}\vec{e}_r} + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\dot{\varphi}\sin\theta \end{pmatrix}$$

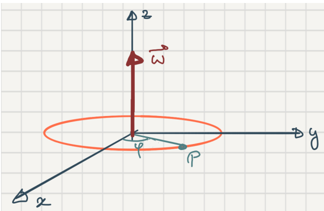
$$\begin{aligned} a_r &= \cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \cancel{2\dot{r}}\dot{\varphi}\sin\theta \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Table des matières

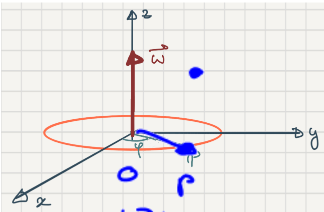
8 Vecteur rotation

On considère un point P ayant un mouvement circulaire dans le plan (O,x,y) à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$.



8 Vecteur rotation

On considère un point P ayant un mouvement circulaire dans le plan (O,x,y) à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$.



$|\vec{r}| = \text{cte}$

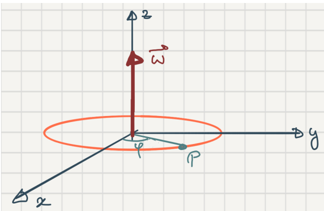
$\vec{\omega} = ?$

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur de norme ω, perpendiculaire au plan contenant le cercle décrit par *P* et de sens donné par la règle du tire-bouchon.

$\vec{\omega}$ **est appelé vecteur rotation**

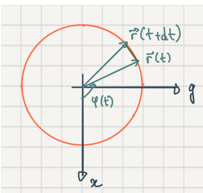
8 Vecteur rotation

On considère un point P ayant un mouvement circulaire dans le plan (O,x,y) à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$.



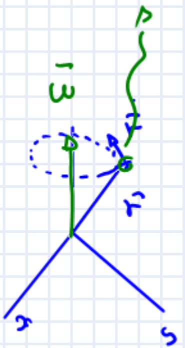
Soit $\vec{\omega}$ le vecteur de norme ω, perpendiculaire au plan contenant le cercle décrit par P et de sens donné par la règle du tire-bouchon.

$\vec{\omega}$ est appelé vecteur rotation



Dérivée d'un vecteur de norme constante

Soit $\vec{r}$ un vecteur de norme constante. Alors $\dot{\vec{r}}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$



$$|\vec{r}| = cte \Rightarrow |\vec{r}|^2 = cte \qquad \vec{r}\cdot\vec{r} = cte$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = 0 = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \underline{2\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r} = 0}$$

$$\boxed{\dot{\vec{r}} \perp \vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}} \perp \vec{\omega}$$

$$\vec{v} = \cancel{\dot{r}\,\vec{e}_r} + r\dot{\varphi}\,\underline{\vec{e}_\varphi} + \cancel{\dot{z}\,\vec{e}_z}$$

$$\boxed{\dot{\vec{r}} \perp \vec{\omega}}$$

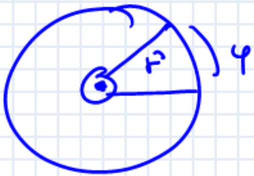
$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{v} \doteq \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_z = 0$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} \sim \dot{\vec{r}}$$

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \alpha(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

Mouvement circulaire dans (O, x, y) d'un point P :



$\dot r = 0 \qquad \dot\varphi = \omega$

$\vec r = r\,\vec e_r$

$\dot{\vec r} = r\dot\varphi\,\vec e_\varphi = r\omega\,\vec e_\varphi$

$\alpha(\vec\omega \times \vec r) = \omega\,\vec e_z \times r\,\vec e_r$

$= \omega r\,(\vec e_z \times \vec e_r) = +\omega r\,\vec e_\varphi =$

$\alpha = 1$

$$\boxed{\dot{\vec r} = \vec\omega \times \vec r}$$

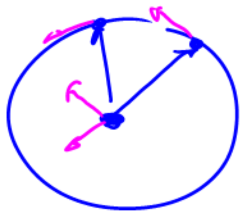
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$\vec{r}$ de *norme constante* subissant une rotation donnée par $\vec{\omega}$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Si $|\vec{\omega}|$ = cte = mvt circulaire uniforme