Rappels Mathématiques

Dr. Yves Revaz

2025

Table des matières

Un vecteur est caractérisé par sa norme, sa direction et son sens.

Un vecteur servira donc à représenter une grandeur pour laquelle, en plus de **la "valeur"**, il est important de savoir **le sens** et **la direction**.

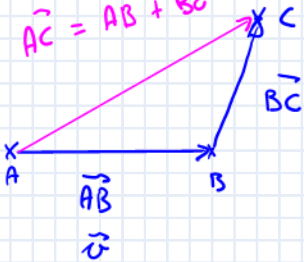
Un vecteur n'est pas lié à son point d'attachement ($\neq$ point d'application) !

Typiquement, les grandeurs représentées par des vecteurs sont sont : les déplacements, les vitesses, les accélérations et les forces.

Addition vectorielle (oppérations commutatives) et multiplication par un scalaire

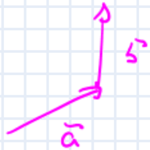
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{w}$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$



$\vec{BC} = \vec{u}$

$\vec{v} + \vec{u}$



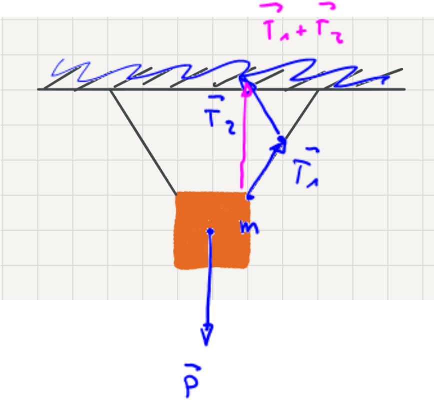
$\vec{BC} = u$

- $\vec{e} \cdot a = \vec{a}$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

$$-\vec{P} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

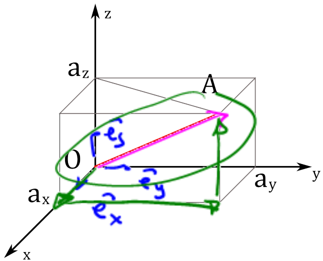
Exemple de bilan des forces



Vecteurs : en coordonnées cartésiennes

Afin de manipuler les vecteurs dans l'espace (à 3 dimensions), il est commode de les décomposer selon leurs composantes cartésiennes.

On fait partir le vecteur de l'origine du repère, les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité :



ici $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$
il a comme composantes a_x, a_y, a_z

Le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire grâce aux composantes et aux vecteurs de base du repère

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

On pourra noter verticalement les composantes du vecteur $\vec{a}$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. \qquad \equiv \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

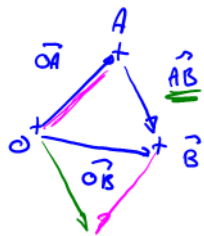
N.B. : dans certains livres, le vecteur $\vec{a}$ est noté **a**

La somme de deux vecteurs se calcule par la somme de ses composantes

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right. + \vec{b}\left|\begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array}\right. = \vec{a}+\vec{b}\left|\begin{array}{l} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{array}\right.$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par la soustraction des coordonnées des points B et A.

$$A\left|\begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array}\right. \; ; \; B\left|\begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array}\right. \rightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right.$$



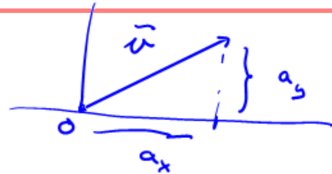
En physique, tout bouge... nos vecteurs sont des fonctions du temps t. Nous aurons besoin de calculer leurs dérivées par rapport au temps.

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

$$\frac{d}{dt}\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y} + a_z \vec{e_z} \right)$$

(1) $\frac{d}{dt} a_x \cdot \vec{e_x} + \frac{d}{dt} a_y \vec{e_y} + \frac{d}{dt} a_z \cdot \vec{e_z}$

(2) $\frac{d}{dt} a_x \cdot \vec{e_x} + a_x \frac{d}{dt} \vec{e_x} + \frac{d}{dt} a_y \vec{e_y} + a_y \frac{d}{dt} \vec{e_y} + \frac{d}{dt} a_z \vec{e_z} + a_z \frac{d}{dt} \vec{e_z}$



Vecteurs : norme

Définition

La norme d'un vecteur est par définition **la longueur du segment sous-tendu**, c'est-à-dire que pour un vecteur $\overrightarrow{OA}$ donné, sa norme est la longueur du segment $[OA]$.
La norme s'obtient en calculant la racine carrée de la somme des composantes au carré :

$$||\vec{a}|| = |\vec{a}| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

en règle générale, on notera : $\vec{v}$ $v = |\vec{v}|$

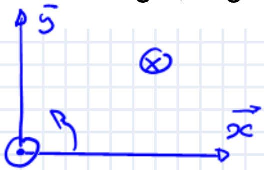
$$||\vec{a}|| = |\vec{a}| = a$$

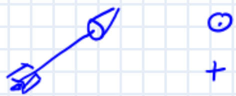
Trièdres, Trièdres directs et orthonormés

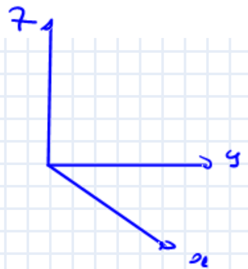
Trièdre : figure géométrique formée par trois vecteurs qui ont la même origine et qui ne sont pas coplanaires deux à deux.

Trièdre orthonormé : trièdre dont les trois vecteurs de base sont normés et orthogonaux entre eux.

Trièdre direct : trièdre qui respecte l'orientation positive (règle des trois doigts, rêgle du tire-bouchon)



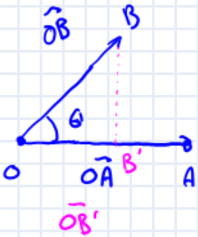




$\odot$ sort de la feuille

$\otimes$ entre dans la feuille

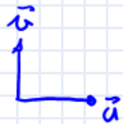
Produit scalaire



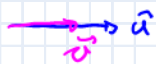
$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} := |\vec{OA}|\cdot\overbrace{|\vec{OB}|\cos(\theta)}^{|\vec{OB'}|}$$

$$|\vec{OB'}| = \cos(\theta)\,|\vec{OB}|$$

$$|\vec{OB'}| = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}|}$$

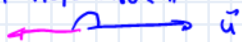


- $\vec{u} \perp \vec{v} \equiv \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- $\vec{u}$ colinéaire $\vec{v}$ et de même sens $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

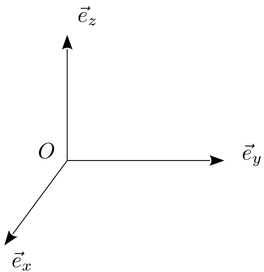


$\theta = 0$

- $\vec{u}$ " " et de sens opposé $\vec{u}\cdot\vec{v} = -|\vec{u}||\vec{v}|$ $\theta = 180° = \pi$ $\cos(\pi) = -1$



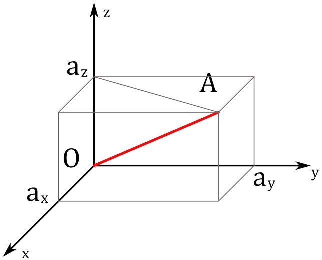
Produit scalaire entre vecteurs unitaires d'un trièdre orthonormé (vecteurs de base orthogonaux)



$$
\begin{array}{lll}
\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0 \\
\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0 & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 \\
\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0 & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y = 0 & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1
\end{array}
$$

$$\left(\vec{a} = \overline{a_x \vec{e}_x} + \overline{a_y \vec{e}_y} + \overline{a_z \vec{e}_z}\right) \times \vec{e}_x = a_x$$

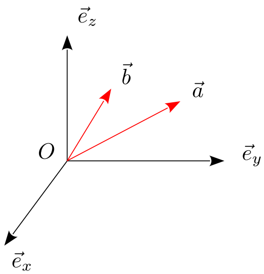
Composantes et produit scalaire



$$\vec{a} \cdot \vec{e}_x = a_x$$
$$\vec{a} \cdot \vec{e}_y = a_y$$
$$\vec{a} \cdot \vec{e}_z = a_z$$

La composante a_i de $\vec{a}$ s'obtient en effectuant $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$

Produit scalaire en composantes



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

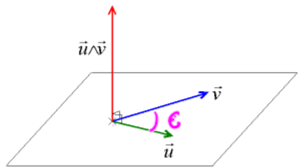
$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z\right) \cdot \left(b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z\right)$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Produit vectoriel



Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

- le vecteur $\vec{w}$ est *orthogonal* aux deux vecteurs donnés ;
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de *sens direct* ;
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$

$\longrightarrow$ $\theta = 0$, $\pi - \theta = 0$

θ

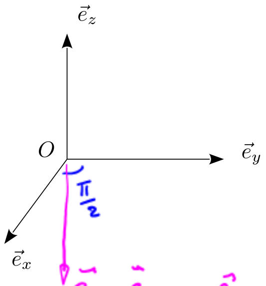
$\vec{u} \parallel \vec{v} \equiv |\vec{u} \times \vec{v}| = 0$

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

Note : les notations suivantes sont équivalentes :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \qquad \equiv \qquad \vec{u} \times \vec{v}$$

Produit vectoriel entre vecteurs unitaires d'un trièdre orthonormé (vecteurs de base orthogonaux)



$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \end{cases}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

et de plus

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Table des matières

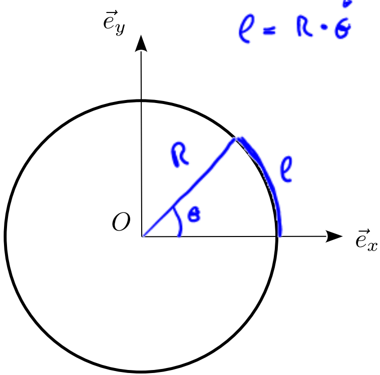
Trigonométrie

Nous utiliserons souvent les angles en *radians* .

Le cercle complet fait 2π radians. Cette définition permet de relier directement la longueur de l'arc de cercle à l'angle et au rayon par $l = R\theta$ avec θ en radians.

radian

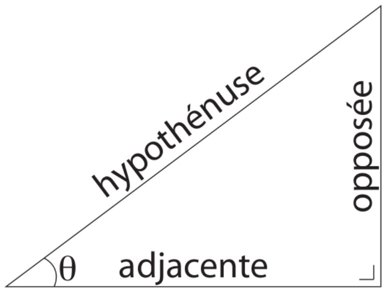
$l = R \cdot \theta$



angle	longueur
2π	$2\pi R$
θ	$l = \frac{\theta}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} R$

$l = \theta R$

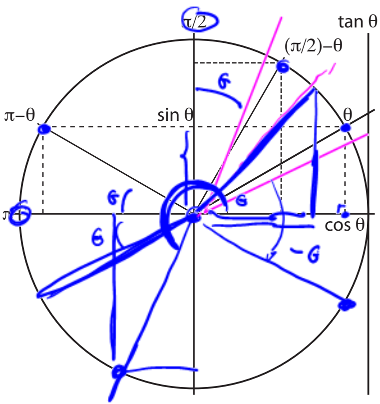
Trigonométrie dans le triangle rectangle



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Cercle trigonométrique

$R = 1 \qquad \cos\theta = \text{adj}$



$$\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta) \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta) \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta) \qquad \sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta) \qquad \cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(0) = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin(0) = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Identités trigonométriques

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \tag{1}$$

$$\boxed{\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}} \tag{2}$$

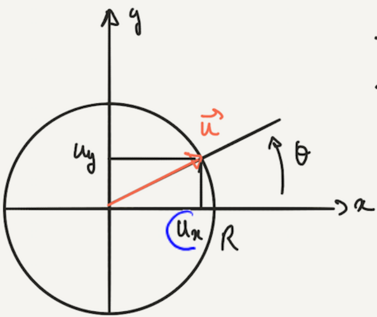
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \tag{3}$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \tag{4}$$

...et bien d'autres dans votre formulaire et sur le web. Vous devez les savoir ou savoir les retrouver (ou les mettre dans votre formulaire personnel)

Vecteurs et trigonométrie

Vous aurez souvent à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme, et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. En d'autre termes, la projection d'un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).

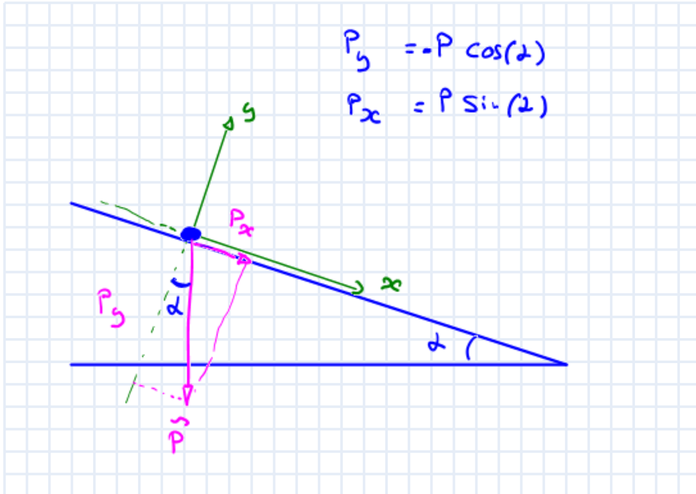


$$u_x = R\cos\theta = \vec{u}\cdot\vec{e}_x$$

$$u_y = R\sin\theta = \vec{u}\cdot\vec{e}_y$$

Vecteurs et trigonométrie

Par exemple, ici, on décompose une force (le poids) en deux composantes portées respectivement par l'axe *x* et l'axe *y*. Avant de faire la projection, il faut bien identifier l'angle par des considérations géométriques.



Pour cela, faites toujours un dessin avec des angles franchement différents de 45°! Sinon vous risquez de faire des erreurs dans le report des angles.

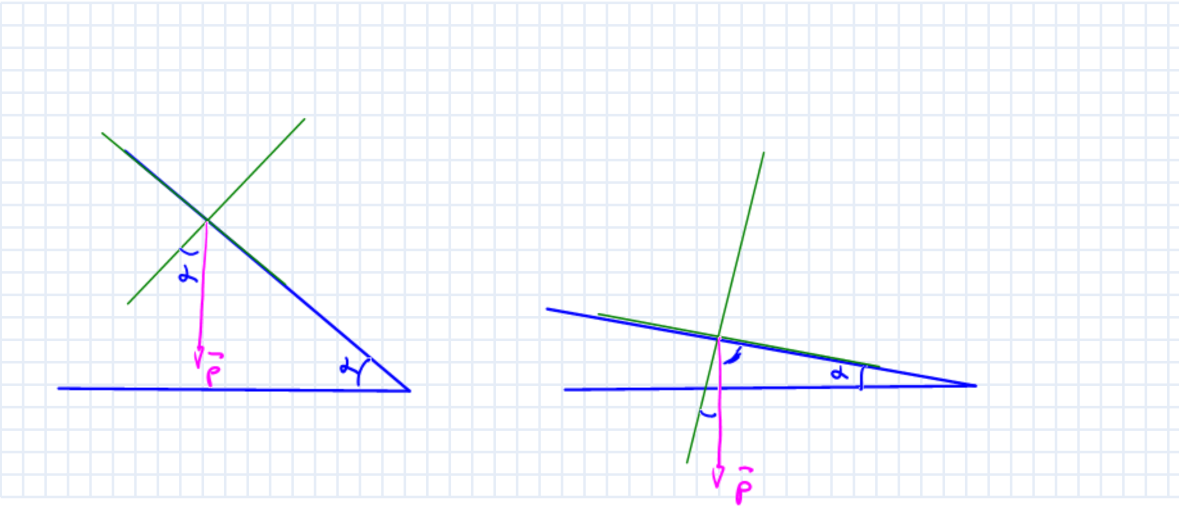
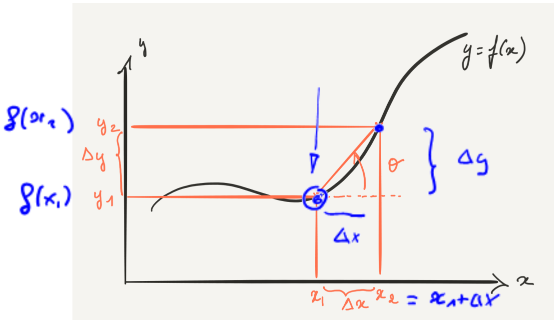


Table des matières

Dérivées

Soit une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe $y = f(x)$ dans le plan. La corde prise entre deux points a une pente caractérisée par l'angle θ.



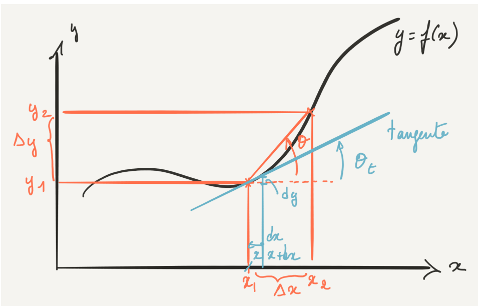
$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La dérivée de la fonction f au point 1 est la limite de $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la *pente de la tangente à la courbe :*

y_2 y_1

$f(x_2) - f(x_1)$ dx df

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{\cancel{x_1} + dx - \cancel{x_1}} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx}$$



En physique on utilisera souvent la variation infinitésimale de la fonction f

$\underline{df} = f(x + dx) - f(x)$

pour une variation dx de x.

$f'(x) = \frac{df}{dx}$

$= \frac{d}{dx} f(x)$

Vous devez connaître les dérivées des fonctions usuelles.

fonction	dérivée
a	0
x	1
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
x^n	$n\,x^{n-1}$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' \longrightarrow -n\,x^{-n-1} = -n\,x^{-(n+1)}$$

$$\frac{1}{x} \longrightarrow -\frac{1}{x^2}$$

Somme, Produit et composition de fonctions

$f(x) \quad g(x)$

- $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$
- $\left(f(x)\, g(x)\right)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
- $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\, g'(x)$

ex :

$$f(t) = \cos(\Omega t)$$

$$\frac{d}{dt} f(t) = f'(t) = -\sin(\Omega t)\,\Omega = -\Omega \sin(\Omega t)$$

Primitive

$f(x) = F'(x)$

Calculer la primitive de f(x), c'est "la manoeuvre inverse" du calcul de la dérivée.

C'est chercher la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Comme la dérivée d'une constante est 0, on peut ajouter n'importe quelle constante à F ça ne change rien, donc "la primitive de F est définie à une constante près".

$f(x) = \cos(x) \qquad F(x) = \sin(x) + A$

$F(x_0) = F_0 \qquad F(x_0) = \sin(x_0) + A = F_0 \qquad A = F_0 - \sin(x_0)$

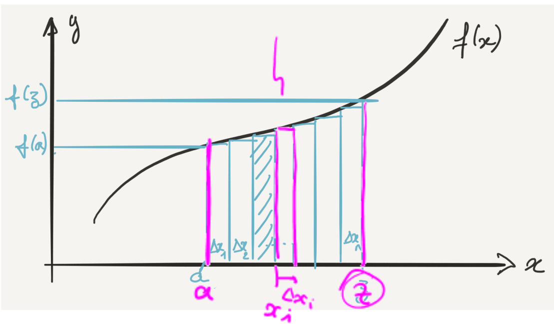
$$\boxed{F(x) = \sin(x) + F_0 - \sin(x_0)}$$

$f(1)$

Intégrale

On cherche à calculer l'aire sous la courbe entre le point $x = a$ et $x = z$.

$a_i = \Delta x_i \cdot f(x_i)$



C'est à peu près la somme des petits rectangles de largeur Δx_i et de hauteur $f(x_i)$

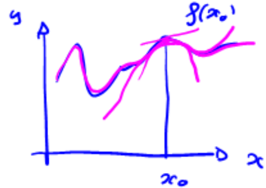
$\Delta x_i = \Delta x$

$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

Plus Δx est petit plus l'aire est calculée juste. Finalement

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^z f(x)dx = F(z) - F(a)$$

Table des matières



Développement limité en série de Taylor

Intérêt : remplacer une fonction compliquée par un polynôme $a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2$

$$f(x_0+\epsilon) \simeq f(x_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)\epsilon + + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x_0)\epsilon^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x_0)\epsilon^n$$

$f(x) = (1+x)^n$ pour x petit : $x \simeq 0$

$x_0 = 0$

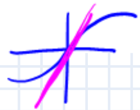
$$f(x) \simeq \underline{1 + n\cdot\varepsilon} + \frac{1}{2} n\cdot(n-1)\,\varepsilon^2 + \dots$$

$$f'(x) = n\,(1+x)^{n-1} \Rightarrow f'(0) = n$$

$$f''(x) = n\cdot(n-1)(1+x)^{n-2} \Rightarrow f''(0) = n\cdot n-1$$

$$f(x) \simeq 1 + n\cdot\varepsilon$$

Développement limité en série de Taylor utiles dans ce cours



$$(1+x)^n \simeq 1 + nx \qquad \frac{1}{(1+x)^n} \simeq 1 - nx$$

$$\ln(1+x) \cong x \qquad e^x = 1 + x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \sin x = x$$

$$\tan x \simeq x$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} \simeq 1 - n(-x) = 1 + nx$$

Table des matières

Nous utilisons le système international (SI) !

Grandeur de base		Unité de base	
Nom	**Symbole caractéristique**	**Nom**	**Symbole**
temps	t	seconde	s
longueur	l, x, r, etc.	mètre	m
masse	m	kilogramme	kg
courant électrique	I, i	ampère	A
température thermodynamique	T	kelvin	K
quantité de matière	n	mole	mol
intensité lumineuse	I_{v}	candela	cd

Presque entièrement redéfini en 2018, entré en vigueur en 2019 ! Il est mainte- nant entièrement basé sur des constantes de la nature plutôt que sur des grandeurs étalon.

Le SI est défini au moyen des sept constantes suivantes :

Constante à définir	Symbole	Valeur	Unité	Symbole
Constante de Planck	h	$6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J s ($\mathrm{J\,s} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$)	Kilogramme	kg
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$299\,792\,458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	Mètre	m
Fréquence de transition de la structure hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$9\,192\,631\,770\ \mathrm{s^{-1}}$	Seconde	s
Charge élémentaire	e	$1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C ($\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$)	Ampère	A
Constante de Boltzmann	k	$1{,}380\,649 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$ ($\mathrm{J\,K^{-1}} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}}$)	Kelvin	K
Constante d'Avogadro	N_{A}	$6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$	Mole	mol
Équivalent de rayonnement photométrique d'un rayonnement monochromatique de 540×10^{12} Hz	K_{cd}	$683\ \mathrm{lm\,W^{-1}}$	Candela	cd

En mécanique, nous aurons besoins de trois unités fondamentales :

- **La seconde** est l'unité de temps du SI (*s*). Elle correspond à la durée de 9'192'631'770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 ($\lambda\nu\mathrm{Cs}$).
- **Le mètre** est l'unité de distance du SI (*m*). Un mètre est défini par la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière (vitesse *c*) pendant une durée de $1/299792458\,\mathrm{s}$.
- **Le kilogramme** est l'unité de masse du SI (*kg*). Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h, égale à $6.62607015 \cdot 10^{34}\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$, soit $6.62607015 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Analyse dimensionnelle :
But : Utiliser les unités pour vérifier l'homogénéité du résultat, retrouver une formule ou essayer d'en deviner une.

Principe : Une égalité ne peut être vraie que si les unités sont les mêmes de chaque côté du signe "égal".

Exemple 1 :

Un caillou est lâché d'une hauteur h. Le temps de chute calculé est $t = \sqrt{2h/g}$, avec h, la hauteur initiale et g l'accélération de la pesanteur. Le résultat est-il correct ?

l'unité de t $[s]$

l'unité de h $[m]$

l'unité de g $\frac{[m]}{[s^2]}$

$$[s] = \sqrt{\frac{[\cancel{m}]}{[\cancel{m}]}[s^2]} = [s]$$

Exemple 2 : Soit un caillou de masse m en chute libre, ayant une vitesse v lorsqu'il atteint une hauteur h. Pierre affirme que son énergie cinétique vaut : $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ et son énergie potentielle $E_p = mgh^2$. Est-ce bien correct ?