Rappels Mathématiques

Dr. Yves Revaz

2025

Table des matières

Un vecteur est caractérisé par sa norme, sa direction et son sens.

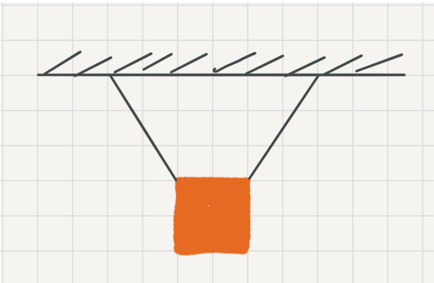
Un vecteur servira donc à représenter une grandeur pour laquelle, en plus de **la "valeur"**, il est important de savoir **le sens** et **la direction**.

Un vecteur n'est pas lié à son point d'attachement ($\neq$ point d'application) !

Typiquement, les grandeurs représentées par des vecteurs sont sont : les déplacements, les vitesses, les accélérations et les forces.

Addition vectorielle (oppérations commutatives) et multiplication par un scalaire

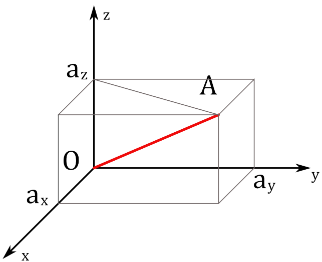
Exemple de bilan des forces



Vecteurs : en coordonnées cartésiennes

Afin de manipuler les vecteurs dans l'espace (à 3 dimensions), il est commode de les décomposer selon leurs composantes cartésiennes.

On fait partir le vecteur de l'origine du repère, les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité :



ici $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$
il a comme composantes a_x, a_y, a_z

Le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire grâce aux composantes et aux vecteurs de base du repère

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

On pourra noter verticalement les composantes du vecteur $\vec{a}$

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right. \qquad \equiv \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

N.B. : dans certains livres, le vecteur $\vec{a}$ est noté **a**

La somme de deux vecteurs se calcule par la somme de ses composantes

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right. + \vec{b}\left|\begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array}\right. = \vec{a}+\vec{b}\left|\begin{array}{l} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{array}\right.$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par la soustraction des coordonnées des points B et A.

$$A\left|\begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array}\right. \;;\; B\left|\begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array}\right. \rightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right.$$

En physique, tout bouge... nos vecteurs sont des fonctions du temps t. Nous aurons besoin de calculer leurs dérivées par rapport au temps.

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

Vecteurs : norme

Définition

La norme d'un vecteur est par définition **la longueur du segment sous-tendu**, c'est-à-dire que pour un vecteur $\overrightarrow{OA}$ donné, sa norme est la longueur du segment $[OA]$.
La norme s'obtient en calculant la racine carrée de la somme des composantes au carré :

$$||\vec{a}|| = |\vec{a}| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

en règle générale, on notera :

$$||\vec{a}|| = |\vec{a}| = a$$

Trièdres, Trièdres directs et orthonormés

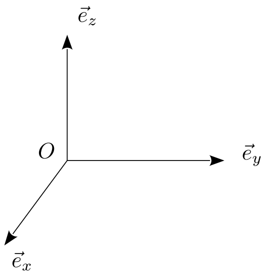
Trièdre : figure géométrique formée par trois vecteurs qui ont la même origine et qui ne sont pas coplanaires deux à deux.

Trièdre orthonormé : trièdre dont les trois vecteurs de base sont normés et orthogonaux entre eux.

Trièdre direct : trièdre qui respecte l'orientation positive (règle des trois doigts, rêgle du tire-bouchon)

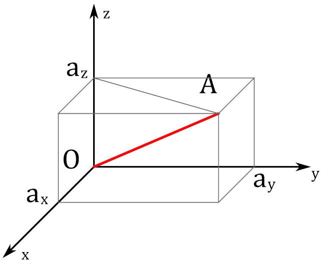
Produit scalaire

Produit scalaire entre vecteurs unitaires d'un trièdre orthonormé (vecteurs de base orthogonaux)



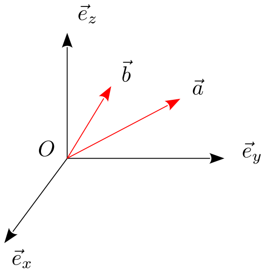
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$$
$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0 \qquad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 \qquad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$
$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0 \qquad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y = 0 \qquad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

Composantes et produit scalaire



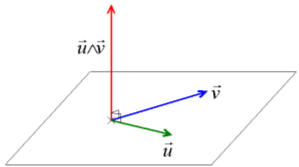
La composante a_i de $\vec{a}$ s'obtient en effectuant $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$

Produit scalaire en composantes



$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Produit vectoriel



Définition

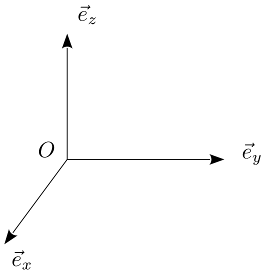
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

- le vecteur $\vec{w}$ est *orthogonal* aux deux vecteurs donnés ;
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de *sens direct* ;
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$

Note : les notations suivantes sont équivalentes :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \qquad \equiv \qquad \vec{u} \times \vec{v}$$

Produit vectoriel entre vecteurs unitaires d'un trièdre orthonormé (vecteurs de base orthogonaux)



et de plus

$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

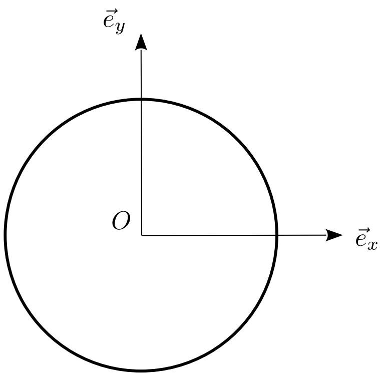
Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

Table des matières

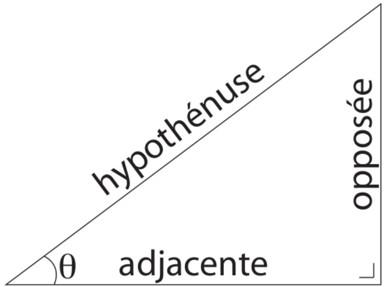
Trigonométrie

Nous utiliserons souvent les angles en *radians* .

Le cercle complet fait 2π radians. Cette définition permet de relier directement la longueur de l'arc de cercle à l'angle et au rayon par $l = R\theta$ avec θ en radians.

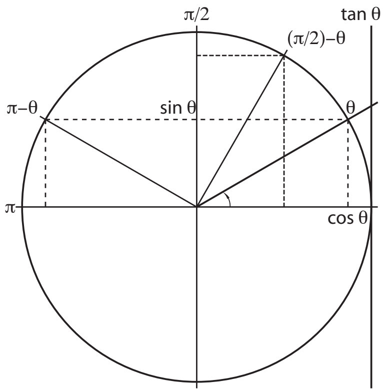


Trigonométrie dans le triangle rectangle



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Cercle trigonométrique



Identités trigonométriques

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \tag{1}$$

$$\boxed{\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}} \tag{2}$$

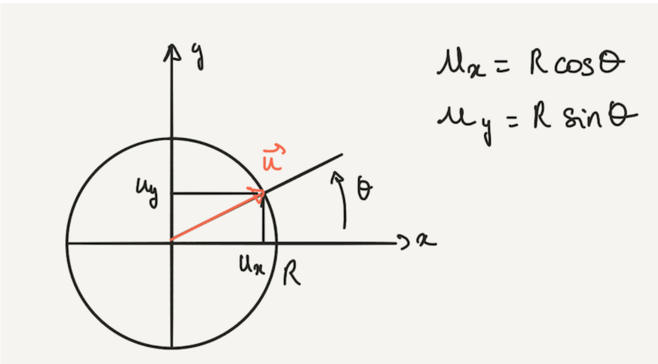
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \tag{3}$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \tag{4}$$

...et bien d'autres dans votre formulaire et sur le web. Vous devez les savoir ou savoir les retrouver (ou les mettre dans votre formulaire personnel)

Vecteurs et trigonométrie

Vous aurez souvent à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme, et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. En d'autre termes, la projection d'un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).



Vecteurs et trigonométrie

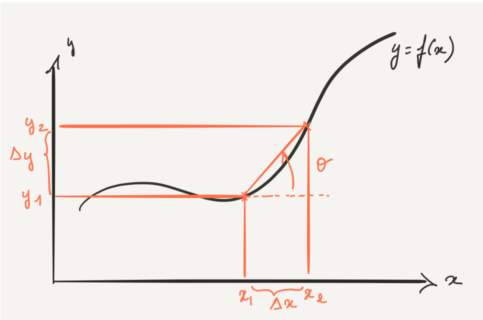
Par exemple, ici, on décompose une force (le poids) en deux composantes portées respectivement par l'axe x et l'axe y. Avant de faire la projection, il faut bien identifier l'angle par des considérations géométriques.

Pour cela, faites toujours un dessin avec des angles franchement différents de 45°! Sinon vous risquez de faire des erreurs dans le report des angles.

Table des matières

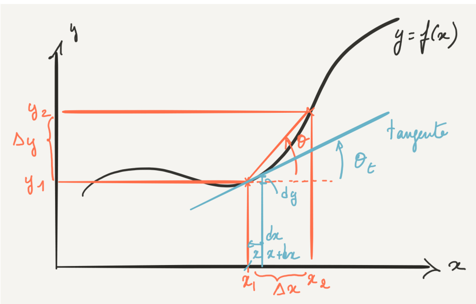
Dérivées

Soit une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe $y = f(x)$ dans le plan. La corde prise entre deux points a une pente caractérisée par l'angle θ.



La dérivée de la fonction f au point 1 est la limite de $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la *pente de la tangente à la courbe :*

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{x_1 + dx - x_1} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx}$$



En physique on utilisera souvent la variation infinitésimale de la fonction f
$df = f(x + dx) - f(x)$
pour une variation dx *de* x.

Vous devez connaître les dérivées des fonctions usuelles.

Produit et composition de fonctions

Primitive

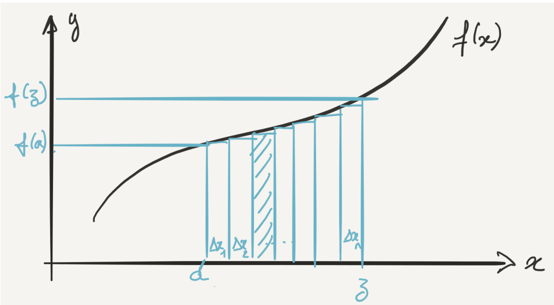
Calculer la primitive de f(x), c'est "la manoeuvre inverse" du calcul de la dérivée.

C'est chercher la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Comme la dérivée d'une constante est 0, on peut ajouter n'importe quelle constante à F ça ne change rien, donc "la primitive de F est définie à une constante près".

Intégrale

On cherche à calculer l'aire sous la courbe entre le point $x = a$ et $x = z$.



C'est à peu près la somme des petits rectangles de largeur Δx_i et de hauteur $f(x_i)$

$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

Plus Δx est petit plus l'aire est calculée juste. Finalement

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^z f(x)dx = F(z) - F(a)$$

Table des matières

Développement limité en série de Taylor

Intérêt : remplacer une fonction compliquée par un polynôme

$$f(x_0+\epsilon) \simeq f(x_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)\epsilon + + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x_0)\epsilon^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x_0)\epsilon^n$$

$f(x) = (1+x)^n$ pour x petit :

Développement limité en série de Taylor utiles dans ce cours

Table des matières

Nous utilisons le système international (SI) !

Grandeur de base		Unité de base	
Nom	**Symbole caractéristique**	**Nom**	**Symbole**
temps	t	seconde	s
longueur	l, x, r, etc.	mètre	m
masse	m	kilogramme	kg
courant électrique	I, i	ampère	A
température thermodynamique	T	kelvin	K
quantité de matière	n	mole	mol
intensité lumineuse	I_v	candela	cd

Presque entièrement redéfini en 2018, entré en vigueur en 2019 ! Il est mainte- nant entièrement basé sur des constantes de la nature plutôt que sur des grandeurs étalon.

Le SI est défini au moyen des sept constantes suivantes :

Constante à définir	Symbole	Valeur	Unité	Symbole
Constante de Planck	h	$6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J s (J s = kg m² s⁻¹)	Kilogramme	kg
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$299\,792\,458$ m s^{-1}	Mètre	m
Fréquence de transition de la structure hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$9\,192\,631\,770$ s^{-1}	Seconde	s
Charge élémentaire	e	$1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C (C = A s)	Ampère	A
Constante de Boltzmann	k	$1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ J K^{-1} (J K^{-1} = kg m^2 s^{-2} K^{-1})	Kelvin	K
Constante d'Avogadro	N_{A}	$6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$ mol^{-1}	Mole	mol
Équivalent de rayonnement photométrique d'un rayonnement monochromatique de 540×10^{12} Hz	K_{cd}	683 lm W^{-1}	Candela	cd

En mécanique, nous aurons besoins de trois unités fondamentales :

- **La seconde** est l'unité de temps du SI (*s*). Elle correspond à la durée de 9‘192‘631‘770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 ($\lambda\nu\mathrm{Cs}$).
- **Le mètre** est l'unité de distance du SI (*m*). Un mètre est défini par la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière (vitesse *c*) pendant une durée de $1/299792458\,\mathrm{s}$.
- **Le kilogramme** est l'unité de masse du SI (*kg*). Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h, égale à $6.62607015 \cdot 10^{34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$, soit $6.62607015 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Analyse dimensionnelle :

But : Utiliser les unités pour vérifier l'homogénéité du résultat, retrouver une formule ou essayer d'en deviner une.

Principe : Une égalité ne peut être vraie que si les unités sont les mêmes de chaque côté du signe "égal".

Exemple 1 :

Un caillou est lâché d'une hauteur h. Le temps de chute calculé est $t = \sqrt{2h/g}$, avec h, la hauteur initiale et g l'accélération de la pesanteur. Le résultat est-il correct ?

Exemple 2 : Soit un caillou de masse m en chute libre, ayant une vitesse v lorsqu'il atteint une hauteur h. Pierre affirme que son énergie cinétique vaut : $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ et son énergie potentielle $E_p = mgh^2$. Est-ce bien correct ?