Solutions

Solution 1 1) Le centre de masse de la planche est à la distance $l/2$ du point O, celui du paquet à D. La distance au point O du centre de masse du système « planche + paquet » est donnée par la loi de composition des centres de masse :

$$d_{cm} = \frac{1}{M+m}(Ml/2 + mD)$$

2) Le moment d'inertie I du système « planche + paquet » est la somme des deux moments, pris sur Ox. Celui du paquet est $I_{pa} = mD^2$ (objet ponctuel).
On doit utiliser le théorème de Steiner pour exprimer celui de la planche I_{pl} :

$$I_{pl} = 1/12Ml^2 + 1/4Ml^2 = 1/3Ml^2$$

Finalement :

$$I_{Ox} = \frac{1}{3}Ml^2 + mD^2$$

3) On applique le théorème du moment cinétique pour une rotation autour de Ox.
Moment du poids (le moment de la réaction s'annulle) :

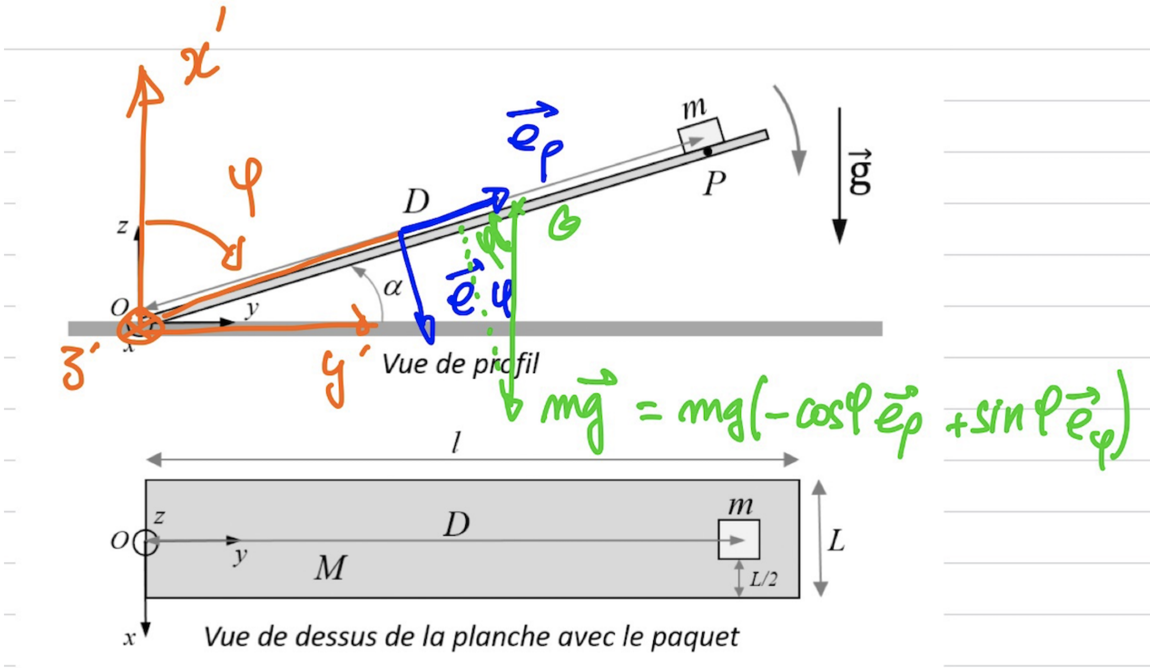
$$\vec{M}_O^{ext} = \overrightarrow{OG} \wedge (M+m)\vec{g} = (d_{cm}\cos\alpha\vec{e}_y + d_{cm}\sin\alpha\vec{e}_z) \wedge -(M+m)g\vec{e}_z = -g(Ml/2+mD)\cos\alpha\vec{e}_x$$

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = -I_{Ox}\dot{\omega}\vec{e}_x = -g(Ml/2+mD)\cos\alpha\vec{e}_x$$

Avec ω la vitesse angulaire selon (Ox).Dans l'évolution temporelle, l'angle α évolue au cours du temps, c'est cela qui donne l'équation différentielle obtenue dans le cours. Ici, le calcul est simplifié du fait qu'on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe à $t = 0$.

$$\dot{\omega} = \frac{Ml/2 + mD}{I_{Ox}} g\cos\alpha$$

4) Il y a un léger "piège" ici. Le système de coordonnées proposés ne permet pas de facilement remettre un système de coordonnées polaires, il faut trouver soi même comment astucieusement poser ces coordonnées pour bien décrire le problème. On peut prendre le système suivent. Il correspond à des coordonnées cylindriques vues de dessous, et quand la planche tombe, φ est une variable croissante, donc $\omega = \dot{\varphi}$



Le point où est posé le paquet décrit un mouvement circulaire (non uniforme). Son l'accélération est donnée en coordonnées cylindriques par

$$\vec{a}_P = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Avec $\rho = D = cte$ et $\dot{\varphi} = \omega$:

$$\vec{a}_P = -D\omega^2\vec{e}_\rho + D\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$$

La planche est lâchée sans vitesse initiale (et on s'intéresse à $t = 0$), $\omega(t = 0) = 0$

$$\vec{a}_P = D\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$$

$$a_z = \vec{a}_P \cdot \vec{e}_z = -D\dot{\omega}\cos\alpha = -D\frac{Ml/2 + mD}{I_{Ox}}g\cos^2\alpha$$

5) Pour que le paquet reste sur la planche à $t = 0$, il faut que $|a_z < g|$

$$D\frac{Ml/2 + mD}{I_{Ox}}g\cos^2\alpha < g$$

$$\frac{\frac{MlD}{2} + mD^2}{\frac{1}{3}Ml^2 + mD^2} \cos^2 \alpha < 1$$

Solution 2

Lorsque le bloc m est en mouvement sans pour autant tomber du bloc M, il se déplace selon un mouvement harmonique de même fréquence f et la même amplitude que le bloc M. Il est simplement soumis à la force de frottement en plus.

Mettons nous dans le cas où le bloc m est dans un cas extrême, sur le point de glisser au moment où le sens du mouvement change.

La deuxième loi de Newton sur l'axe vertical nous donne la valeur de la force de réaction, on obtient $R = mg$. En appliquant même loi de Newton sur l'axe horizontal, on obtient

$$ma_{max} = \mu_s R = \mu_s mg$$

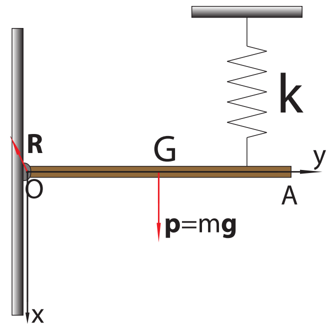
avec $a_{max} = A\omega^2$ avec A l'amplitude des oscillations et ω leur pulsation.

Dès lors, on a

$$mA\omega^2 = \mu_s mg \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{\mu_s g}{\omega^2} = \frac{\mu_s g}{(2\pi f)^2}}$$

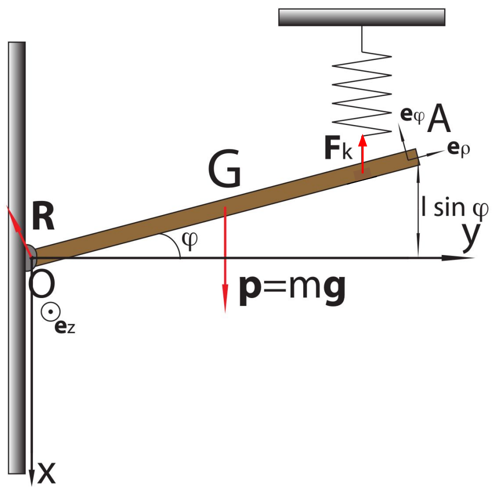
<u>Note</u> : On se place au moment où le bloc change de sens car c'est à cet endroit que l'accélération est la plus forte et donc l'endroit où le bloc est le plus susceptible de décrocher.

Solution 3
La position d'équilibre est donnée par la figure suivante :



Nous commençons par calculer l'allongement du ressort à la position d'équilibre ($\sum \vec{M}_{F_{ext}} = \vec{0}$) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_k &= \vec{0} \\
\frac{l}{2}\vec{e}_y \wedge mg\vec{e}_x + l\vec{e}_y \wedge (-kd_0)\vec{e}_x &= \vec{0} \\
\Rightarrow \frac{1}{2}lmg &= kld_0 \\
\boxed{d_0 = \frac{mg}{2k}}
\end{aligned}$$



Calcul des oscillations autour de cet allongement :

$$\sum \vec{M}_0^{ext} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}$$

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_k = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{l}{2}\vec{e}_\rho \wedge (-\sin\varphi\vec{e}_\rho - \cos\varphi\vec{e}_\varphi)mg + l\vec{e}_\rho \wedge (\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi)kx = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}$$

avec x l'allongement du ressort par rapport à la position de repos du ressort (sans masse), soit

$$x = -l\sin\varphi + d_0$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\sum \vec{M}_0^{ext} &= -\frac{l}{2}mg\cos\varphi\vec{e}_z + kl\cos\varphi(-l\sin\varphi + d_0)\vec{e}_z \\ &= \left[-\frac{l}{2}mg\cos\varphi - l^2k\cos\varphi\sin\varphi + kld_0\cos\varphi\right]\vec{e}_z = -kl^2\cos\varphi\sin\varphi\vec{e}_z\end{aligned}$$

Comme

$$\vec{L}_0 = I_0\dot{\varphi}\vec{e}_z = \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

La loi des moments nous donne (avec l'approximation des petits angles) :

$$\sum \vec{M}_0^{ext} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}$$

$$-kl^2\varphi\vec{e}_z = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}\vec{e}_z$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3k}{m}\varphi = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}}}$$