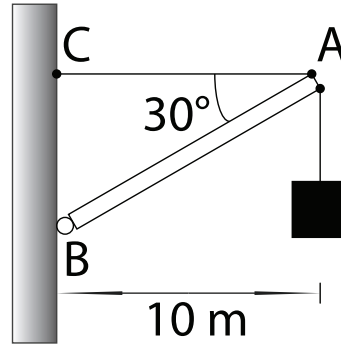


## Exercices

### Exercice 1 *Ambiance tendue au bistrot*

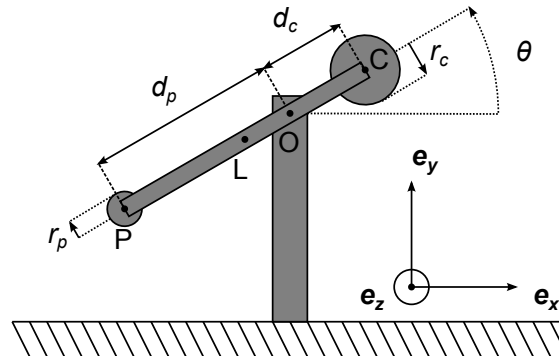
Une enseigne de bistrot est accrochée comme montré sur le schéma ci-contre.  $AB$  est une poutre reliée au mur par un pivot en  $B$ .  $AC$  est un câble qui retient la poutre et l'enseigne et est aussi fixée par un câble. Les câbles sont de masse négligeables et la masse de la poutre et de l'enseigne sont 15 kg et 300 kg respectivement.



Trouvez les forces  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_C$  agissant sur  $B$  et  $C$  respectivement.

### Exercice 2 *Être catapulté au centre du problème*

On se propose d'étudier la dynamique de la catapulte représentée sur la figure ci-dessous.



La catapulte est constituée d'un levier assimilé à une tige mince homogène de masse  $m_l$  fixé à un support au point  $O$ . Le projectile est une boule pleine de masse  $m_p$  et de rayon  $r_p$  fixée à l'extrémité  $P$  du levier à une distance  $d_p$  de l'axe de rotation. Une boule pleine de masse  $m_c$  et de rayon  $r_c$  placée à l'autre extrémité  $C$  à une distance  $d_c$  de l'axe de rotation sert de contre-poids permettant d'actionner la catapulte. L'angle  $\theta$  est défini comme étant l'angle entre l'horizontale  $\vec{e}_x$  et le vecteur  $\vec{OC}$ . On suppose qu'un mécanisme permet d'éjecter le projectile quand l'angle  $\theta_e$  atteint la valeur désirée.

1. Placer sur la figure les forces agissant sur la catapulte.
2. Calculer les moments d'inertie par rapport à l'axe de rotation pour le projectile ( $I_p$ ), le contre-poids ( $I_c$ ) et le levier ( $I_l$ )? En déduire le moment d'inertie global  $I_O$  du système projectile+contre-poids+levier.

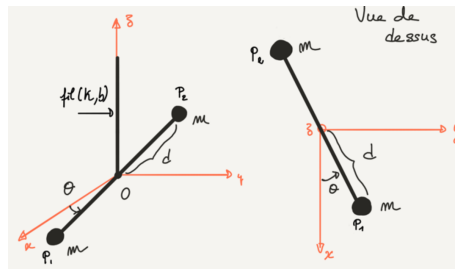
3. Quelle condition doit-on avoir entre  $m_c$ ,  $d_p$ ,  $m_c$ ,  $d_c$  et  $m_l$  pour faire fonctionner la catapulte ?
4. Donner l'équation différentielle sur  $\theta(t)$  qui permet de décrire le mouvement de la catapulte en utilisant le moment d'inertie global  $I_O$  du système.
5. Donner la vitesse du projectile en fonction de l'angle d'éjection, sachant que l'angle initiale  $\theta(t = 0) = \theta_0$  et que la vitesse angulaire initiale est nulle.

**Exercice 3** *Balance ton Cavendish. Examen 2019*

La balance de Cavendish est un instrument permettant de déterminer expérimentalement la constante de gravitation  $G$ . Elle est constituée de deux points matériels  $P_1$  et  $P_2$  de même masse  $m$  reliés par une tige sans masse à un fil, formant un pendule de torsion. Deux grosses sphères de masse  $M$ ,  $S_A$  et  $S_B$ , peuvent être placées de manières à faire dévier le pendule dans un sens ou dans l'autre par l'effet de la gravitation.

**Partie 1 : Etude du pendule de torsion**

Les masses  $P_1$  et  $P_2$  sont reliées par une tiges sans masse de longueur  $2d$ , et contraintes de tourner autour de  $O$  dans le plan horizontal  $(O, x, y)$ .

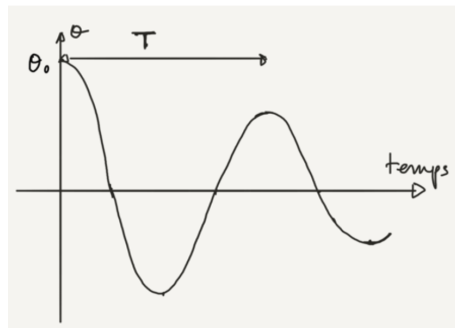


- a) Calculer le moment d'inertie  $I_O$  du pendule de torsion par rapport à l'axe  $(Oz)$

Le fil est caractérisé par deux constantes,  $\kappa$  et  $b$ , définies comme suit :

- le fil exerce un moment élastique dépendant de l'angle de déviation  $\theta$ , donné par  $\vec{M}_O^e = -\kappa\theta\vec{e}_z$
- et les frottements internes du fil exercent le moment  $\vec{M}_O^f = -b\dot{\theta}\vec{e}_z$

On écarte le pendule de sa position d'équilibre de l'angle  $\theta_0$  et on le lâche sans lui communiquer de vitesse angulaire. On mesure l'angle de déviation en fonction du temps et on observe des oscillations décroissantes avec une pseudo période  $T$  (voir ci-contre)

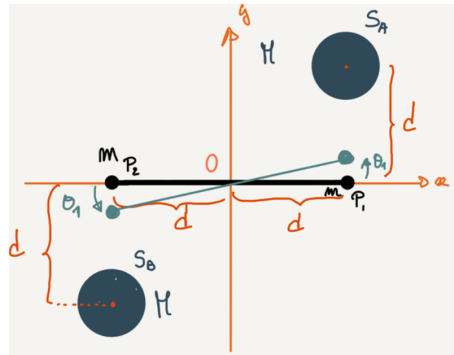


- b) Etablir l'équation différentielle du mouvement sur la variable  $\theta$ .

- c) Quelle est la pulsation propre du pendule de torsion ?
- d) Donner la forme générale de la solution de l'équation différentielle sans calculer les constantes d'intégration. Expliciter la pseudo-période et le facteur d'amortissement en fonction des données du problème.
- e) On suppose l'amortissement très faible ( $b \approx 0$ ) et on mesure  $T$ . Déterminer  $\kappa$  en fonction de  $T, m$  et  $d$ .

**Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles**

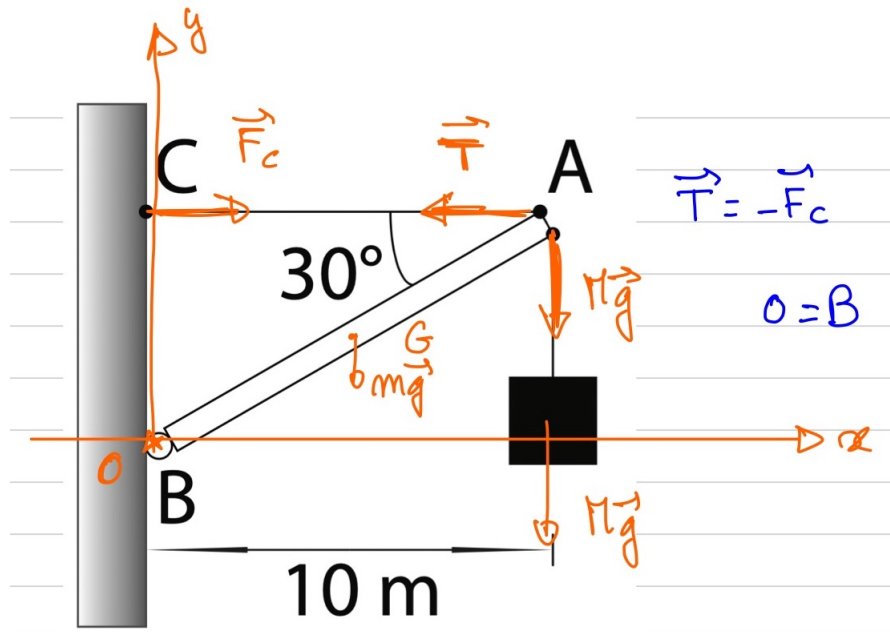
On amène les deux grosses sphères ( $S_A, S_B$ ) de masse  $M$ , en regard des masses ponctuelles ( $P_1, P_2$ ) à une distance  $d$  de l'axe  $Ox$ , et on laisse le pendule s'équilibrer avec l'angle de déviation  $\theta_1$ . On suppose l'angle  $\theta_1$  très faible ( $\theta \ll 1$ ).



- a) Exprimer (vectoriellement) le moment  $\vec{M}_{O,1}^{tot}$ , par rapport à  $O$  sur le pendule, lié à la force de gravitation de  $S_A$  sur  $P_1$  et de  $S_B$  sur  $P_2$ .
- b) Exprimer (vectoriellement) le moment  $\vec{M}_{O,2}^{tot}$  lié à la force de gravitation de  $S_A$  sur  $P_2$  et de  $S_B$  sur  $P_1$ .
- c) Montrer que pour un calcul d'ordre de grandeur, on peut négliger  $\|\vec{M}_{O,1}^{tot}\|$  devant  $\|\vec{M}_{O,2}^{tot}\|$ .
- d) Exprimer l'angle  $\theta_1$  à l'équilibre en fonction de  $G, M, m, d$  et  $\kappa$ .
- e) Dédire l'expression de  $G$  en fonction de  $M, m, d, T$  et  $\theta_1$ , grandeurs qui sont connues ou facilement mesurables.
- f) Question subsidiaire (ne faisait pas partie de l'examen) : Utiliser les données de l'expérience pour évaluer l'ordre de grandeur de  $G$ . La période  $T$  fait 8 minutes,  $M = 1.5$  kg,  $m = 15$ g,  $d = 5$ cm, et on mesure  $\theta_1$  grâce à la déviation du faisceau laser, soit 20 cm sur les 13,5 m de l'amphi

## Solutions

### Solution 1



Écrivons les deux critères de stabilité statique, en appelant  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_C$  les forces qui s'appliquent aux points respectifs A, B et C, et  $m\vec{g}$  le poids de la poutre qui s'applique en son centre de gravité, G situé à mi-chemin de B et A. On prend comme système la poutre. Le câble applique en A une tension  $\vec{T}$  égale à  $-\vec{F}_C$ . On place l'origine O au point B, et on définit un axe (Ox) horizontal et un axe (Oy) vertical.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{T} + \vec{F}_G = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{O}\vec{O} \wedge \vec{F}_B + \vec{O}\vec{A} \wedge (M\vec{g}) + \vec{O}\vec{A} \wedge \vec{T} + \vec{O}\vec{G} \wedge (m\vec{g}) = \vec{0} \quad (2)$$

Soit  $M = 300$  kg la masse de l'enseigne,  $m = 15$  kg la masse de la poutre, la longueur  $CA = 10$  m et l'angle  $\alpha = 30^\circ$ . La condition (1) donne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B^x \\ F_B^y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La condition (2), en posant  $l$  la longueur de la barre, avec

$$\vec{O}\vec{A} = l(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$$

$$\vec{OG} = \frac{l}{2}(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$$

$$\vec{T} = -T\vec{e}_x \quad M\vec{g} = -Mg\vec{e}_y \quad m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$$

donne

$$-Mgl \cos \alpha \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y - Tl \sin \alpha \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x - mg \frac{l}{2} \cos \alpha \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{0}$$

soit

$$-Mgl \cos \alpha \vec{e}_z + Tl \sin \alpha \vec{e}_z - mg \frac{l}{2} \cos \alpha \vec{e}_z = \vec{0} \quad (4)$$

La condition (3) nous donne immédiatement

$$F_B^x = T$$

$$F_B^y = (M + m)g$$

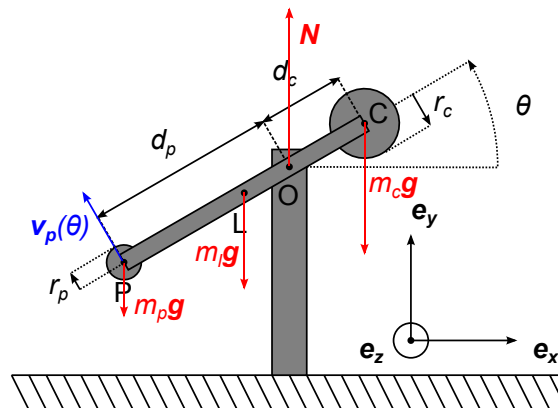
et la condition (4) fournit :

$$T = F_C = g \left( M + \frac{1}{2}m \right) \cot \alpha$$

A.N. :  $F_C = 5224.9 \text{ N}$  et  $F_B = 6070.3 \text{ N}$ .

### Solution 2

1. Schéma avec forces :



2. Moment d'inertie du projectile :  $I_p = \underbrace{\frac{2}{5}m_p r_p^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_p d_p^2}_{\text{Steiner}}$

Moment d'inertie du contre-poids :  $I_c = \underbrace{\frac{2}{5}m_c r_c^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_c d_c^2}_{\text{Steiner}}$

**Moment d'inertie du levier :** La longueur totale du levier est  $d_p + d_c$  et la distance du centre de masse L du levier par rapport à l'axe de rotation est donnée par

$$d_l = \frac{d_p + d_c}{2} - d_c = \frac{d_p - d_c}{2}$$

et l'on a

$$I_l = \underbrace{\frac{1}{12} m_l (d_p + d_c)^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_l \left( \frac{d_p - d_c}{2} \right)^2}_{\text{Steiner}}$$

**Moment d'inertie du système :**  $I_O = I_p + I_c + I_l$

3. Pour faire fonctionner la catapulte il faut que le centre de masse du système se trouve du côté du contre-poids par rapport à l'axe de rotation, c'est-à-dire

$$m_c d_c > m_p d_p + m_l \frac{d_p - d_c}{2}$$

4. La somme des moments de forces extérieures par rapport à l'axe de rotation vaut :

$$\begin{aligned} \sum \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} &= \vec{OP} \wedge (m_p \vec{g}) + \vec{OC} \wedge (m_c \vec{g}) + \vec{OL} \wedge (m_l \vec{g}) + \underbrace{\vec{OO} \wedge \vec{N}}_{\vec{0}} \\ &= m_p d_p g \cos \theta \vec{e}_z - m_c L_c g \cos \theta \vec{e}_z + m_l \frac{d_p - d_c}{2} g \cos \theta \vec{e}_z \\ &= \left( m_p d_p - m_c d_c + m_l \frac{d_p - d_c}{2} \right) g \cos \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

Le moment cinétique du système vaut :

$$\vec{L}_O = I_O \dot{\theta} \vec{e}_z$$

et sa dérivée par rapport au temps

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O \ddot{\theta} \vec{e}_z$$

On posant  $\sum \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$  on trouve

$$I_O \ddot{\theta} = \left( m_p d_p - m_c d_c + m_l \frac{d_p - d_c}{2} \right) g \cos \theta$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{\left( m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2} \right)}{I_O} g \cos \theta = 0$$

5. **Résolution par la conservation de l'énergie :** En définissant l'énergie potentielle par rapport au levier en position horizontale, soit  $\theta = 0$ , l'énergie mécanique du système pour un angle  $\theta$  quelconque est donnée par

$$E_{\text{mécanique}} = \underbrace{-m_p d_p g \sin \theta + m_c d_c g \sin \theta - m_l \frac{d_p - d_c}{2} g \sin \theta}_{\text{Energie potentielle}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2}_{\text{Energie cinétique}}$$

Initialement l'énergie mécanique vaut

$$E_{\text{mécanique}, t=0} = (-m_p d_p + m_c d_c - m_l \frac{d_p - d_c}{2}) g \sin \theta_0$$

La conservation de l'énergie mécanique nous permet alors de trouver la vitesse angulaire

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g (\sin \theta_0 - \sin \theta)}$$

**Résolution alternative :**

On multiplie d'abord l'équation différentielle décrivant le mouvement de la catapulte par  $\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g \dot{\theta} \cos \theta = 0$$

puis on intègre

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g \sin \theta + K = 0$$

avec  $K$  une constante d'intégration que l'on détermine avec les conditions initiales  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$

$$K = - \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g \sin \theta_0$$

On trouve alors la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g (\sin \theta_0 - \sin \theta)}$$

**Dans les deux cas**, la vitesse d'éjection du projectile est obtenue en multipliant la vitesse angulaire par  $d_p$  et en posant  $\theta = \theta_e$  :  $v_p(\theta_e) = d_p \dot{\theta}$  soit

$$v_p(\theta_e) = d_p \sqrt{2 \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g (\sin \theta_0 - \sin \theta_e)}$$

**Remarque :** En notant  $M$  la masse totale du système projectile+levier+contre-poids et  $d_G$  la distance du centre de gravité de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation, l'expression de la vitesse angulaire peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{Mgd_G}{I_O} (\sin \theta_0 - \sin \theta_e)}$$

### Solution 3

#### Partie 1 : Etude du pendule de torsion

a)  $I_O = m\overline{OP_1}^2 + m\overline{OP_2}^2 = 2md^2$

b)  $O$  est un point fixe (et le centre de masse), on applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{e}_z} + \vec{M}_O^{\vec{f}} \Rightarrow I_O \ddot{\theta} \vec{e}_z = -\kappa \theta \vec{e}_z - b \dot{\theta} \vec{e}_z \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{2md^2} \dot{\theta} + \frac{\kappa}{2md^2} \theta = 0$$

c) On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti,  $\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \Omega_0^2\theta = 0$  où  $\Omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur. Par identification :

$$\Omega_0^2 = \frac{\kappa}{2md^2}$$

d) D'après le graphe représentant les oscillations du pendule, il est dans un régime d'amortissement faible. Dans ce cas, la forme générale de la solution de  $\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \Omega_0^2\theta = 0$  est :

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

avec  $\gamma$  le coefficient d'amortissement et  $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$  la pseudo-période.  $\gamma$  est obtenu par identification :  $\gamma = \frac{b}{4md^2}$ .

Ainsi,  $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{2md^2} - \frac{b^2}{(4md^2)^2}}$

e) Pour  $b \approx 0$ ,  $\omega \approx \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\kappa}{2m}}$

On écrit la relation entre la période et la pulsation :

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\kappa}{2m}} \Rightarrow \frac{\kappa}{2m} = \frac{4\pi^2 d^2}{T^2} \Rightarrow \kappa = 8m \left( \frac{\pi d}{T} \right)^2$$

#### Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles

a) Comme  $\theta_1 \ll 1$ , on fait le calcul des moments avec  $\theta_1 = 0$

$$\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}} = \left( d\vec{e}_x \times \frac{GMm}{d^2} \vec{e}_y \right) + \left( -d\vec{e}_x \times \frac{-GMm}{d^2} \vec{e}_y \right) = 2 \frac{GMm}{d} \vec{e}_z$$

b) Le vecteur unitaire  $\vec{e}_p$  dans la direction  $\overrightarrow{P_2S_A}$  est donné par  $\vec{e}_p = \frac{\overrightarrow{P_2S_A}}{\|\overrightarrow{P_2S_A}\|}$ . On obtient donc que  $\vec{e}_p = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y \right)$ . Pour la direction  $\overrightarrow{P_1S_B}$ , on a simplement que  $\overrightarrow{P_1S_B} = -\overrightarrow{P_2S_A}$ . Au final, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,2}^{tot}} &= \left( -d\vec{e}_x \times \frac{GMm}{5d^2} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y \right) \right) + \left( d\vec{e}_x \times -\frac{GMm}{5d^2} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y \right) \right) \\ &= -\frac{2}{5\sqrt{5}} \frac{GMm}{d} \vec{e}_z \end{aligned}$$

c)  $\frac{\|\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}\|}{\|\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}}\|} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \approx \frac{1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{10}$ . Environ 10 fois plus petit, c'est bien négligeable pour calculer un ordre de grandeur.

d) Comme c) l'indique, on ne tient pas compte de  $\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}$ . A l'équilibre, le moment total est nul en  $O$  :

$$\overrightarrow{M_O^{el}} + \underbrace{\overrightarrow{M_O^f}}_{=0} + \overrightarrow{M_{O,1}^{tot}} = 0 \Rightarrow 2 \frac{GMm}{d} = \kappa \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 2 \frac{GMm}{d\kappa}$$

e) On injecte 1e) dans 2d)

$$G = \frac{\theta_1 d \kappa}{2Mm} = \frac{\theta_1 d}{2Mm} \frac{8m\pi^2 d^2}{T^2} = 4 \frac{\pi^2 \theta_1 d^3}{MT^2}$$