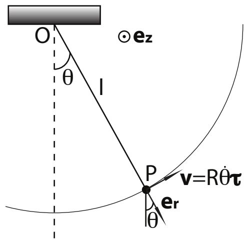
Solutions

Solution 1



1. Le théorème du moment cinétique nous donne :

$$R = l = cte.$$

$$\begin{aligned}\sum M_0^{ext} &= \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(lml\dot{\theta}\vec{e}_z)\end{aligned}$$

En explicitant les moments de force en jeux, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{g} + \underbrace{\overrightarrow{OP} \wedge \vec{T}}_{\vec{0}} &= l^2 m\ddot{\theta}\vec{e}_z \\ \cancel{l}\vec{e}_r \wedge \cancel{m}\vec{g} &= l^{\cancel{2}}\cancel{m}\ddot{\theta}\vec{e}_z \\ -g\sin\theta\vec{e}_z &= l\ddot{\theta}\vec{e}_z\end{aligned}$$

et donc, finalement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

<u>Retrouver l'équation grâce à l'énergie :</u>

L'énergie mécanique est conservée $\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2 + mgl - mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{\theta}\ddot{\theta}l^2 + mgl\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

2. La masse effectue un mouvement circulaire non uniforme. Les forces sont $\vec{T}$ et $m\vec{g}$

$$m\frac{v^2}{l}\vec{n} + m\frac{dv}{dt}\vec{\tau} = T\vec{n} - mg\cos\theta\vec{n} - mg\sin\theta\vec{\tau}$$

Projeté sur $\vec{n}$ cela permet d'obtenir T (recherché)

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta$$

v est maximum quand le fil est vertical. $\cos\theta$ est aussi maximum quand le fil est vertical (θ vaut alors 0 et $\cos\theta = 1$). Donc la tension est maximum quand le fil est vertical.

La force que doit supporter le fil est donc donnée par

$$T_{\mathrm{max}} = m\frac{v_v^2}{l} + mg$$

avc v_v vitesse lors du passage à la verticale.

Or, si l'angle de départ est θ_0, l'énergie mécanique du système est $mgl(1-\cos\theta_0)$, et donc la vitesse maximale (lorsque $\theta = 0$) est $v_v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$. La force maximale que doit supporter le fil est alors donnée par :

$$\boxed{T_{max} = 2mg\left(\frac{3}{2} - \cos\theta_0\right)}$$

Solution 2

La conservation de l'énergie juste avant que la fille ne se lève nous donne :

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_1)}$$

où nous avons remplacé h_1 par sa valeur $l(1-\cos\alpha_1)$.

Lorsque la fille se lève, il y a conservation du moment cinétique :

$$\vec{L} = \vec{l} \wedge m\vec{v}$$

et comme la vitesse est parallèle à la trajectoire, et donc perpendiculaire au fil, $L = mlv_1$ avant que la fille ne se soit levée, et $L = ml'v_2$ après, avec, ici, $l' = l\cos\alpha_1$. Nous obtenons donc la relation

$$v_2 = \frac{lv_1}{l'} = \frac{v_1}{\cos\alpha_1}$$

La conservation de l'énergie après que la fille se soit levée nous donne :

$$mgh' = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow h' = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g\cos^2\alpha_1} = \frac{l(1-\cos\alpha_1)}{\cos^2\alpha_1}$$

Mais nous avons aussi :

$$h' = l'(1 - \cos\alpha_2) = l\cos\alpha_1(1 - \cos\alpha_2)$$

De ces deux valeurs de h', nous tirons :

$$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{1 - \cos\alpha_1}{\cos^3\alpha_1}$$

Solution 3

1.
$$F_g = \frac{GM(r)m}{r^2} = mg(r)$$

La force gravitationnelle est celle exercée par un corps à symétrie sphérique de la masse correspondant à la masse à l'intérieur de la coquille.
A la surface de la Terre :

$$F_g = \frac{GM_t}{R_T^2} = \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R_T^3 m}{R_T^2} = mg_0$$
$$g_0 = G\rho\frac{4}{3}\pi R_T$$

De même

$$g(r) = G\rho\frac{4}{3}\pi r$$

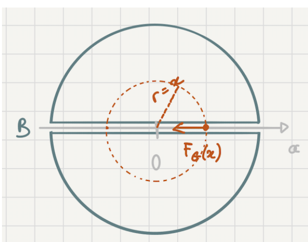
D'ou on a :

$$g(r) = g_0\frac{r}{R_T}$$

2. Axe (Ox) = axe du tunnel et O est le centre de la Terre.
En norme :

$$|\vec{F_G}| = mg(r) = mg_0\frac{r}{R_T}$$

On a donc 2 cas :



Si $(x > 0)$: F_G pointe vers la gauche et $r = x$. Donc

$$\vec{F_G} = -mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_x = -mg_0 \frac{x}{R_T} \vec{e}_x$$

Si $(x < 0)$: F_G pointe vera la droite et $r = -x$ car $r > 0$. Par suite

$$\vec{F_G} = mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_x = -mg_0 \frac{x}{R_T} \vec{e}_x$$

Dans tous les cas on a (avec x algébrique) :

$$\vec{F_G} = -m \frac{g_0}{R_T} x \vec{e}_x$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x = -m \frac{g_0}{R_T} x \vec{e}_x$$

$$\ddot{x} + \frac{g_0}{R_T} x = 0$$

est notre equation differentielle du mouvement. Nous avons un mouvement oscillatoire de type harmonique :

$$x(t) = R_T \cos(\Omega_0 t)$$

avec $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R_T}}$ si on lache depuis A a $t = 0$. Le temps de traversee est donne par une demi periode :

$$\frac{T}{2} = \frac{2\pi/\Omega_0}{2}$$

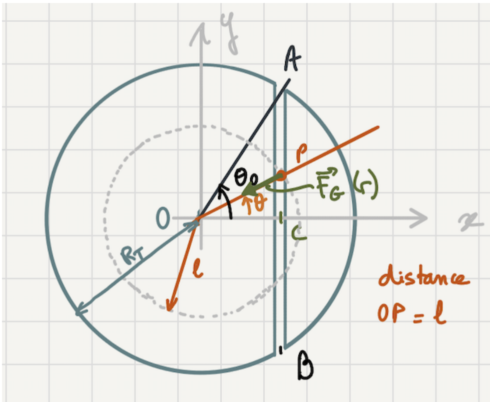
$$T = \pi \sqrt{\frac{R_T}{g_0}} = \pi \sqrt{\frac{6,4.10^6}{10}} = 2,5.10^3 s \approx 42 min$$

La vitesse au centre est :

$$\dot{x}(t) = -R_T \Omega_0 \sin(\Omega_0 t)$$

Au centre, $\dot{x}_{max} = R_T \Omega_0 = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T}$. Donc $|v_{\text{centre}}| = \sqrt{10.6,4.10^6} = 8.10^3 m/s = 8 km/s$

3. On a maintenant la situation suivante



Les forces en P sont :

- $\vec{F_G} = -g(l)m\cos\theta\vec{e}_x - mg(l)\sin\theta\vec{e}_y$
- reaction des parrois du tunnel $\vec{N} = N\vec{e}_x$

Si $\theta > 0$, on aura $\sin\theta > 0$ et la composante sur y qui est < 0.

Si $\theta < 0$, on aura $\sin\theta > 0$ et la composante sur y qui est > 0 :)

Donc sur $\vec{e}_x$: $\sum\vec{F}$ vaut 0 (constante de liaison)

Et sur $\vec{e}_y$: $\sum\vec{F} = -mg\sin\theta\vec{e}_y$

4.
$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{y}\vec{e}_y = -mg(l)\sin\theta$$

et

$$g(l) = \frac{l}{R_T}g_0$$

$$\ddot{y} + \frac{g_0}{R_T}l\sin\theta = 0$$

Or $y = l\sin\theta$

Donc

$$\ddot{y} + \frac{g_0}{R_T}y = 0$$

avec $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R_T}}$

5. On retrouve la meme equadiff avec les memes pulsations propres. Donc la 1/2 periode et la meme. Le temps de traversee est toujours de 42 minutes.

Solution 4

1. La force de gravitation à la surface de l'astéroïde est égale à la pesanteur. On a donc

$$F_G = \frac{GMm}{R_A^2} = \frac{GM_Am}{R_A^2} = mg$$

Sur la surface de la Terre, cette égalité devient

$$F_G = mg = \frac{GM_Tm}{R_T^2}$$

En combinant les deux équations, il vient

$$\frac{\cancel{G}M_T}{R_T^2} = \frac{\cancel{G}M_A}{R_A^2} \tag{1}$$

On sait que la masse d'une sphère se trouve par la formule $M_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$ où ρ est sa masse volumique et R son rayon.

Dès lors, en appliquant cette formule à l'équation (1), on trouve

$$\frac{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_T^{\cancel{3}}\rho_T}{\cancel{R_T^2}} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_A^{\cancel{3}}\rho_A}{\cancel{R_A^2}} \Rightarrow R_T\rho_T = R_A\rho_A \Rightarrow \boxed{\rho_A = \rho_T\frac{R_T}{R_A}}$$

2. A.N : $\frac{\rho_A}{\rho_T} = \frac{6{,}4\cdot 10^6}{2} = 3,2 \cdot 10^6$
3. On a que

$$F_{G_{tete}} = \frac{GM_Am_{tete}}{(R_A+h)^2} = m_{tete}g_{tete}$$

De la, on tire

$$g_{tete=\frac{GM_A}{(R_A+h)^2}} \tag{2}$$

Il reste à se débarrasser de G dont la valeur n'est pas donnée dans l'énoncé. Pour cela, on reprend le cas de la pesanteur à la surface de l'astéroïde qui nous donne

$$g = \frac{GM_A}{R_A^2} \Rightarrow GM_A = gR_A^2$$

En injectant cette expression dans (2), on trouve :

$$\boxed{g_{tete} = g\left(\frac{R_A}{R_A+h}\right)^2}$$

4. A.N : $\frac{g_{tete}}{g} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0,5$
5. Le petit prince subit un effet de marée très important.
6. La vitesse de libération est la vitesse à donner à un objet pour qu'il quitte la zone d'attraction de l'astéroïde v_l. On va traiter ça par l'énergie.
   - Initialement : $E_c = \frac{1}{2}mv_l^2$ v_l étant la vitesse de libération à lui donner initialement. $E_p = \frac{-GM_a m}{R_A}$
   - Arrivé à l'infini : $v = 0$, $E_c = E_p = 0$

   L'énergie étant conservée, on a

   $$\frac{1}{2}\cancel{m}v_l^2 - \frac{GM_A\cancel{m}}{R_A} = 0 \Rightarrow v_l^2 = \frac{2GM_A}{R_A}$$

   En se resservant du fait que $GM_A = gR_A^2$, on trouve

   $$v_l^2 = \frac{2GR_A^{\cancel{2}}}{\cancel{R_A}} = 2gR_A \Rightarrow \boxed{v_l = \sqrt{2gR_A}}$$

7. A.N : $v_l = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{10} \approx 6$ m·s^{-1}
8. Le pendule voit son plan d'oscillation tourner à cause de la force de Coriolis $F_C = -ma_C = -m\vec{\Omega}_1\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$. Or, la vitesse $v_{\mathcal{R}'}(P)$ est liée à la période du pendule $\sqrt{\frac{g}{l}}$.
   On sait que g est le même que sur Terre, donc la période du pendule est la même que su Terre. De plus, la période de rotation de l'astéroïde est la même que sur Terre ($T = 24$ h) donc le terme $\vec{\Omega} \times \vec{v}$ est le même que sur Terre.
   On trouve donc que la rotation du plan du pendule est identique sur Terre et sur l'astéroïde.
9. (a) Il effectue une orbite circulaire de rayon $R_A + h_0$. On a donc

   $$F_G = \frac{GM_A m}{(R_A + h_0)^2} = ma_n = m\frac{v^2}{(R_A + h_0)}$$

   De la, on tire la vitesse sur l'orbite donnée par

   $$v^2 = \frac{GM_A}{R_A + h_0} = \frac{gR_A^2}{R_A + h_0}$$

   L'énergie mécanique du petit prince est la somme de ses énergies cinétique et potentielle.

   $$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\frac{gR_A^2}{R_A + h_0} - m\frac{gR_A^2}{R_A + h_0} = \boxed{-\frac{1}{2}m\frac{gR_A^2}{(R_A + h_0)}}$$

(b) A la surface, on a

$$E_m = \frac{1}{2}mv_s^2 - m\frac{gR_A^2 m}{R_A}$$

Où v_s est la vitesse du sprint. La conservation de l'énergie mécanique donne

$$-\frac{1}{2}\cancel{m}\frac{gR_A^2}{R_A + h_0} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_s^2 - \cancel{m}gR_A$$

$$\Rightarrow v_s^2 = 2gR_A - \frac{gR_A^2}{R_A + h_0} = gR_A\left(2 - \frac{R_A}{R_A + h_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_s = \sqrt{gR_A\left(2 - \frac{R_A}{R_A + h_0}\right)}}$$

A.N : $v_s = \sqrt{10 \cdot 2(2 - 2/3)} = \sqrt{20 \cdot 4/3} = 2\sqrt{6,67} \approx 5$ m·s^{-1}