Solutions

Solution 1

1.
$$x(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi)$$
$$A(\omega_e) = \frac{f}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4 * \gamma^2\omega_e^2}}$$
$$\text{avec } f = \frac{F_0}{m},\ \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \gamma = \frac{b_l}{2m}$$

2. L'énergie dissipée l'est par le travail de la force de frottements :
$$E_{diss} = -W_f = -\int_0^T \vec{F}_f \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot dt = -\int_0^T \vec{F}_f \cdot \vec{v} dt$$
$$\vec{F}_f = -b_l\vec{v} \Rightarrow E_{diss} = -\int_0^T -b_l\vec{v}\cdot\vec{v}\cdot dt = \int_0^T b_l v^2 dt$$
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(A\cos(\omega_e t + \varphi)) = -A\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi)$$
$$\Rightarrow E_{diss} = b_l A^2\omega_e^2 \int_0^T \sin^2(\omega_e t + \varphi)dt$$
Pour intégrer, il faut faire un changement de variables. Appelons $y = \omega_e t$ alors $dt = \frac{dy}{\omega_e}$ $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$. Intégrer de $t = 0$ à T revient à intégrer pour y variant de 0 à 2π.
$$E_{diss} = b_l A^2\omega_e^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(y + \varphi)\frac{dy}{\omega_e} = b_l A^2\omega_e\pi$$

3.
$$P_{diss} = \frac{E_{diss}}{T} = \frac{b_l A^2\omega_e\pi}{\frac{2\pi}{\omega_e}} = \frac{b_l A^2\omega_e^2}{2}$$

4. La puissance mécanique dissipée à la fréquence de résonance est donnée par $P_r = \frac{b_l\omega_{res}^2 A^2}{2}$. On en tire l'amplitude du système :
$$A = \frac{1}{\omega_{res}}\sqrt{\frac{2P_r}{b_l}} = \frac{1}{2\pi f_{res}}\sqrt{\frac{2P_r}{b_l}}$$
L'amortissement de l'amplitude A est décrit par un terme $A_0e^{-\gamma t}$, où A_0 est l'amplitude initiale, γ le facteur d'amortissement et t le temps d'amortissement. En $t_1 = 1$ s, l'amplitude diminue de moitié :
$$A_0e^{-\gamma t_1} = \frac{A_0}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\ln 2}{t_1}$$

Or, le facteur d'amortissement est donné par $\gamma = \frac{b_l}{2m}$, et donc :

$$b_l = 2m\frac{\ln 2}{t_1}$$

L'amplitude lorsque la machine est en route est donc :

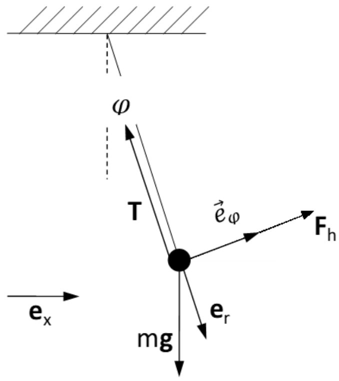
$$A = \frac{1}{2\pi f_{res}}\sqrt{\frac{P_r \cdot t_1}{m \ln 2}}$$

A.N. : $A = 27$ cm.

Solution 2

a) Trois forces s'exercent sur Batman. La tension du fil $\vec{T}$, la pesanteur $m\vec{g}$ et la force exercée par le souffle des hélices $\vec{F_h}$. La seconde loi de Newton s'écrit donc :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F_h}$$



Et dans le repère polaire :

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$= (-T + mg\cos\varphi)\vec{e}_\rho + (-mg\sin\varphi + F_0\cos(\omega_e t))\vec{e}_\varphi$$

Nous savons de plus que $\rho = l, \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$, donc :

$$\text{sur } \vec{e}_\rho : -ml\dot{\varphi}^2 = -T + mg\cos\varphi$$

$$\text{sur } \vec{e}_\varphi : ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + F_0\cos(\omega_e t)$$

Dans l'approximation des petits angles $\sin\varphi \approx \varphi$. On obtient finalement l'équation du mouvement selon $\vec{e}_\varphi$ (l'équation du mouvement selon $\vec{e}_\rho$ fait intervenir la force de tension de la corde qui ne nous intéresse pas ici) :

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi + F_0\cos(\omega_e t) \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{F_0}{ml}\cos(\omega_e t)$$

soit :

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = \frac{F_0}{ml}\cos(\omega_e t) \text{ avec } \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

b) Dans le cas d'une équation différentielle du type :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0\cos\omega_e t$$

la solution est donnée par :

$$x(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi)$$

en régime permanent.
Ici l'équation différentielle est

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = f_0 \cos(\omega_e t)$$

avec $\Omega_0^2 = \frac{g}{l}$ et $f_0 = \frac{F_0}{ml}$.
Nous avons donc $\gamma = 0$ (pas d'amortissement).
La solution est donc $\varphi(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \Phi)$ avec $A(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$ (voir cours).
Avec $\gamma = 0 \;\Rightarrow\; A(\omega_e) = \frac{\frac{F_0}{ml}}{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)}$
$A(\omega_e)$ est maximum pour $\omega_e = \Omega_0$ ce qui est logique car $\omega_{res} = \sqrt{\Omega_0^2 - \cancel{2\gamma^2}} = \Omega_0$
Pour $\omega_e = \omega_{res}$ on a $A \to \infty$!
On voit la limite du modèle. (En particuliers l'approximation des petits angles ne marchera plus !)

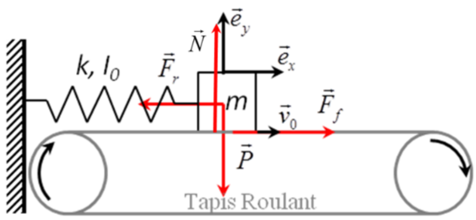
c) Dans l'approximation des petits angles, la pulsation des oscillations d'un pendule est indépendante de leur amplitude. Mais ceci n'est plus vrai pour des oscillations de grandes amplitudes : la pulsation propre du pendule diminue alors quand l'amplitude des oscillations augmente.

   Pour éviter de se faire hacher par les hélices, Batman doit s'éloigner de la condition de résonance au fur et à mesure que ses oscillations augmentent en amplitude. Il va donc choisir la pulsation d'excitation légèrement supérieure à $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Solution 3

a) Vu qu'à l'instant initial la masse se trouve à la position ${}_0$, on y place l'origine de notre repère (cf. schéma). On fait le bilan des forces :

   — la force du ressort $\vec{F}_r = -kx\vec{e}_x$
   — la force de frottement solide correspond à la force de frottement sec statique $\vec{F}_f = F_f\vec{e}_x$ tel que $||\vec{F}_f|| \leq \alpha_s||\vec{N}||$
   — la pesanteur $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$
   — la force normale $\vec{N} = N\vec{e}_y$



   Il n'y a pas de mouvement selon $\vec{e}_y$ donc on a équilibre des forces selon cet axe : $\vec{N} = -\vec{P} = mg\vec{e}_y$
   La force de frottement devient donc : $F_f \leq \alpha_s mg$

Posons donc la seconde loi de Newton selon l'axe x :
$-kx + F_f = m\ddot{x} = 0$ car la masse est entraînée par le tapis à vitesse constante.
La force de frottement sec statique va augmenter au cours du temps jusqu'au moment du décrochage ($t = t_d$). Alors on a :

$$\vec{F_f} = \alpha_s m g \vec{e}_x$$

Au décrochage, la seconde loi de Newton selon l'axe x s'écrit donc : $-kx(t_d)+\alpha_s mg = 0$
Ainsi la distance parcourue au moment du décrochage est :

$$d = x(t_d) = \frac{\alpha_s mg}{k}$$

Comme le tapis entraîne la masse m à une vitesse constante v_0 on a $d = v_0 t_d = \frac{\alpha_s mg}{k}$, donc le temps de décrochage

$$t_d = \frac{\alpha_s mg}{k v_0}$$

b) Après le décrochage du tapis le bilan des forces reste le même à part que la masse subit maintenant un frottement dynamique sec qui s'écrit $F_f = \alpha_d N \vec{e}_x = \alpha_d mg\vec{e}_x$. Donc l'équation de mouvement devient :

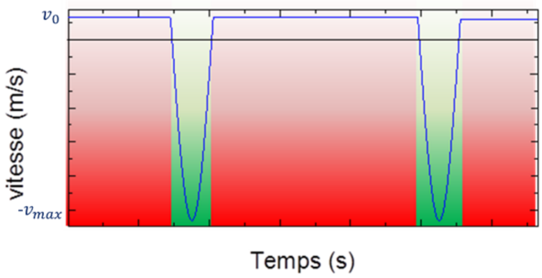
$$-kx + \alpha_d mg = m\ddot{x} \text{ ou bien } \ddot{x} + \frac{k}{m}x - \alpha_d g = 0$$

c) La masse va continuer de glisser et suivre un mouvement sinusoïdal selon l'équation trouvée précédemment, tant qu'elle aura une vitesse différente du tapis roulant. Lorsque la vitesse devient égale à v_0, alors la masse va s'accrocher de nouveau et on repasse dans les conditions de frottement sec statique.

Le mouvement de la masse se compose de deux phases qui se répètent tour à tour :
Première phase : La masse est entrainée par le tapis.

Deuxième phase : La masse s'est décrochée du tapis et suit un mouvement sinusoïdal jusqu'à l'instant t' pour lequel $(t') = v_0$, c'est-à-dire pour lequel la masse m est de nouveau immobile par rapport au tapis. À ce moment-là, la force de frottement statique intervient de nouveau. Et le tapis entraîne de nouveau la masse à vitesse constante v_0.

Remarque : la norme de la vitesse maximale (négative) est supérieure à v_0. En effet,



la conservation de l'énergie mécanique entre le décrochage et le raccrochage nous donne :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \iff v_{max}^2 = v_0^2 + \frac{k}{m}d^2 > v_0^2$$

Solution 4

On suppose que le système comprenant l'obus est isolé, de sorte que sa quantité de mouvement est conservée. Initialement, elle est nulle dans le référentiel CDM ; elle le demeure après l'explosion. Les quantités de mouvement des fragments doivent donc se compenser.

1. $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$, et donc $\vec{P}_2 = -\vec{P}_1$ et les vitesses des fragments sont de sens opposé.
2. Par la conservation de la quantité de mouvement pendant l'explosion, on a :

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = \vec{0}$$

Pour montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires, on calcule le produit triple :

$$\vec{P}_3 \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) = -(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) = -\vec{P}_1 \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) - \vec{P}_2 \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) = 0$$

Les trois vecteurs quantité de mouvement sont donc coplanaires.

Note : montrer que si $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ et $\vec{P}_3$ sont coplanaires, alors $\vec{P}_3 \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) = 0$ (autre méthode) :
Soient $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$, définissant un plan. Soit $\vec{u} = \vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2$. Par définition du produit vectoriel, $\vec{u}$ est normal au plan sous-tendu par $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$. Si $\vec{P}_3$ est dans ledit plan, alors $\vec{P}_3 \cdot \vec{u} = \vec{0}$. QED

3. Les masses des deux fragments sont tous les deux égales à $\frac{m}{2}$. Le point 1. de cet exercice nous donne $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Dans le référentiel CDM, l'énergie de chaque fragment vaut alors $E_{cin} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_i^2$, et donc l'énergie finale totale :

$$E_{cin}^f = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

l'énergie initiale étant nulle. Il vient alors :

$$Q = E^f_{cin} - \cancel{E^i_{cin}}0 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2Q}{m}}$$

et par la définition de la quantité de mouvement, $P_1 = P_2 = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{2Q}{m}} = \sqrt{\frac{mQ}{2}}$.

4. Les masses des trois fragments sont toutes égales à $\frac{m}{3}$. On peut donc écrire :

$$Q = E^f_{cin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{m}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)$$

Or, $P_1 = P_2 \equiv P$ et $\vec{P}_3 = -(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$. De plus, comme $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont perpendiculaires, $P_3 = 2P\cos(45°) = \sqrt{2}P$, et on obtient :

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{m}(P^2 + P^2 + 2P^2) = 6\frac{P^2}{m} \Leftrightarrow P = \sqrt{\frac{mQ}{6}}$$

Finalement,

$$P_1 = P_2 = \sqrt{\frac{mQ}{6}} \qquad \text{et} \qquad P_3 = \sqrt{\frac{mQ}{3}}$$

Pour les vitesses, on obtient :

$$V_1 = V_2 = \sqrt{\frac{3Q}{2m}} \qquad \text{et} \qquad V_3 = \sqrt{\frac{3Q}{m}}$$