Solutions

Solution 1

a) Avant le choc on a :

$$\vec{p_1} = m_1\vec{v_1} = m_1 v_1 \vec{e}_x$$
$$\vec{p_2} = m_2\vec{v_2} = -m_2 v_2(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)$$

On a un choc mou, donc les deux lutteurs restent attachés après le choc et on a la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p_3} = (m_1+m_2)\vec{v_3} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$

On en déduit la norme de $\vec{v_3}$:

$$||\vec{v_3}|| = \frac{1}{m_1+m_2}||\vec{p_1}+\vec{p_2}|| = \frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2+2\vec{p_1}\vec{p_2}}}{m_1+m_2} = \frac{\sqrt{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2-2m_1m_2v_1v_2\cos\alpha}}{m_1+m_2}$$

Pour le calcul de l'angle, on utilise la formule suivante :

$$\tan(\beta-\pi) = \tan\beta = \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \frac{p_{3y}}{p_{3x}} = \frac{p_{1y}+p_{2y}}{p_{1x}+p_{2x}}$$
$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{-m_2v_2\sin\alpha}{m_1v_1 - m_2v_2\cos\alpha}$$

Il faudra faire attention car $\arctan(x)$ délivre un angle entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, or β est entre 0 et π (shema).
Si $(m_1v_1 - m_2v_2\cos\alpha) < 0$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{-m_2v_2\sin\alpha}{m_1v_1 - m_2v_2\cos\alpha}\right)$$

Si $(m_1v_1 - m_2v_2\cos\alpha) > 0$

$$\beta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{-m_2v_2\sin\alpha}{m_1v_1 - m_2v_2\cos\alpha}\right)$$

b) Calcul de l'énergie dissipée pendant le choc. L'énergie cinétique avant le choc s'écrit :

$$E_{c_{ini}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Après le choc, on a :

$$E_{c_{fin}} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_3^2 = \frac{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2-2m_1m_2v_1v_2\cos\alpha}{2(m_1+m_2)}$$

L'énergie dissipée s'écrit donc :

$$E_{c_{dissipée}} = E_{c_{ini}} - E_{c_{fin}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha}{2(m_1+m_2)}$$

$$E_{c_{dissipée}} = \frac{(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1+m_2) - (m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha)}{2(m_1+m_2)}$$

$$E_{c_{dissipée}} = \frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha)}{2(m_1+m_2)}$$

$$E_{c_{dissipée}} = \frac{1}{2}\mu ||\vec{v_1} - \vec{v_2}||^2 \ avec \ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

On remarque que l'énergie dissipée est maximale lorsque $\alpha = 0$, c'est-à-dire lorsqu'on a un choc frontal entre les deux lutteurs.

Solution 2

1. Choc mou $\Rightarrow$ on obtient v vitesse après le choc pour le système (balle, bloc).
   Conservation de $\vec{p}$: $mv_0 = (m+M)\,v \qquad v = \frac{m}{m+M}v_0$
   Conservation de E_m dans la phase "pendule"

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{(m+M)}v^2 + 0 = 0 + \cancel{(m+M)}gh \tag{2}$$

$$v^2 = 2gh \ \Rightarrow \ v = \sqrt{2gh} \tag{3}$$

   et donc

$$v_0 = \frac{m+M}{m}v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh} \tag{4}$$

2.

$$E_{cf} = \frac{1}{2}(m+M)\,v^2 \tag{5}$$

$$E_{ci} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{6}$$

   énergie dissipée :

$$\Delta E = E_{ci} - E_{cf} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)\,v^2 \tag{7}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\frac{m^2}{(m+M)^{\cancel{2}}}v_0^2 \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) \tag{9}$$

   Comme

$$m << M \qquad \frac{m}{m+M} << 1 \qquad \Rightarrow \Delta E \simeq E_{ci} \tag{10}$$

Solution 3

1. Soit v_1 la vitesse de m juste avant le choc. En utilisant la conservation de l'énergie *, on a $mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, qui permet de trouver cette vitesse :

$$v_1^2 = 2gh_1 = 2gR(1 - \cos\theta_1)$$

Détermination de la vitesse de M juste après le choc élastique frontal :
On utilise les formules :

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

Avec $m_2 = M$ et $m_1 = m$ et comme $\vec{v}_2 = \vec{0}$, on en tire :

$$\boxed{\vec{v}_2' = \frac{2m}{m + M}\vec{v}_1}$$

Le point de décollage P est donné par la condition $\vec{N} = \vec{0}$, avec $\vec{N}$ la réaction du support. La deuxième loi de Newton, le mouvement circulaire que décrit M sur la calotte, ainsi qu'une considération géométrique nous donne $-N\vec{e}_r + Mg\sin\theta\vec{e}_r = M\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$, et donc en P ($\vec{N} = \vec{0}$) :

$$v_P^2 = gR\sin\theta \tag{11}$$

La vitesse en P est donnée par la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}Mv_P^2 = \frac{1}{2}Mv_2'^2 + Mgh_2 = \frac{1}{2}Mv_2'^2 + MgR(1 - \sin\theta)$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} v_P^2 &= 2gR(1 - \sin\theta) + v_2'^2 \\ &= 2gR(1 - \sin\theta) + \left(\frac{2m}{m + M}\right)^2 \underbrace{2gR(1 - \cos\theta_1)}_{v_1^2} \end{aligned}$$

et (11) nous donne $v_P^2 = gR\sin\theta$. Donc,

$$3\sin\theta = 2 + 2\left(\frac{2m}{m + M}\right)^2 (1 - \cos\theta_1)$$

*. Pour simplifier les calculs, le "potentiel 0" est placé en haut de la calotte sphérique pour m et au point P pour M.

soit finalement :

$$\boxed{\sin\theta = \frac{2 + 2\left(\frac{2m}{m+M}\right)^2 (1-\cos\theta_1)}{3}}$$

2. Puisque $\theta_1 = 90°$, $\cos\theta_1 = 0$, et donc

$$\sin\theta = \frac{2 + 2\left(\frac{2m}{m+M}\right)^2}{3}$$

Pour que le bloc s'envole directement, il faut avoir $\sin\theta = 1$ ($\theta = 90°$) ! Ainsi, il vient

$$2\left(\frac{2m}{m+M}\right)^2 = 1$$

soit

$$\frac{2m}{m+M} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En réarrangeant les termes de cette dernière expression, on tire

$$m = M\frac{1}{2\sqrt{2}-1}$$

La limite inférieure de m est donc de $m_{lim} = 0.54M$ pour que M décolle directement.

Solution 4

1. Conservation de $\vec{p}$ et E_c (choc élastique)

$$\vec{p} : M\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + m_a\vec{v}'_2 \;\Rightarrow\; MV = m_a\vec{v}'_2$$
$$E_c : \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}m_a v_2'^2 \;\Rightarrow\; \cancel{MV}V = \cancel{m_a v_2'}v_2' \;\Rightarrow\; V = v_2'$$
$$MV = m_a v_2' \text{ et } V = v_2' \;\Rightarrow\; M = m_a$$

2. Maintenant il faut tenir compte du caractère vectoriel de $\vec{p}$:

$$M\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + m_b\vec{v}_1 + m_b\vec{v}_2$$

Projection sur (Ox) :

$$MV = 2m_b v\cos\alpha \tag{12}$$

Conservation de E_c :

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m_b v^2 + \frac{1}{2}m_b v^2 = m_b v^2 \tag{13}$$

12 au carré : $M^2V^2 = 4m_b^2 v^2\cos^2\alpha$

13 : $MV^2 = 2m_b v^2$

13 dans 12 : $M^2V^2 = M\cdot MV^2 = M\cdot 2\cancel{m_b v^2} = 4m_b^{\cancel{2}}\cancel{v^2}\cos^2\alpha \;\Rightarrow\; m_b = \dfrac{M}{2\cos^2\alpha}$

3. a) Conservation de $\vec{p}$ (toujours valable) :

$$mV = (m+m)v'' = 2mv'' \;\Rightarrow\; v'' = \frac{V}{2}$$

b) Les frottements entre les palets dissipent de l'énergie $\Rightarrow$ Non, le choc n'est pas élastique.

c) Avant : $E_c = \dfrac{1}{2}mV^2$

Après : $E_c = \dfrac{1}{2}(2m)v''^2 = \dfrac{1}{2}(2m)\left(\dfrac{V}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}mV^2$

$$\Delta E_c = E_f - E_i = \frac{1}{4}mV^2 - \frac{1}{2}mV^2$$

d) Force de frottement : $F_F = \mu_c R = \mu_c mg$

$W_F = \int_{\text{dépl}} \vec{F}_f\cdot\vec{r} = -\mu_c mgd = \Delta E_c = -\frac{1}{4}mV^2$

$$\Rightarrow\; \mu_c = \frac{V^2}{4gd}$$