

Solutions

Solution 1

Si le fil est rigide : la masse m fait le tour complet si la vitesse en haut est tout juste nulle. Entre le fil à l'horizontale (position A) et la verticale (position B), on a :

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgR$$

et donc $v_0 = \sqrt{2gR}$.

Si le fil est souple : il faut que la tension du fil soit tout juste nulle.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\underbrace{\vec{T}}_0 + m\vec{g} = ma_n\vec{n}$$

$$mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

et donc $v_B = \sqrt{gR}$.

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR$$

soit $v_0^2 = v_B^2 + 2gR = gR + 2gR = 3gR$.

On en tire : $v_0 = \sqrt{3gR}$

Solution 2

On considère un axe Ox parallèle à la pente et dirigé dans le sens de la descente.

Cas 1 : le cycliste descend à $v_1 = 6$ km/h.

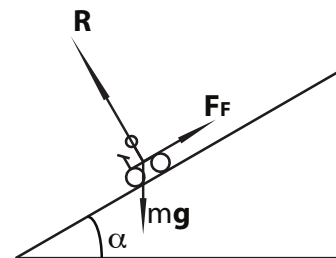
Bilan des forces :

$$m\vec{g} \begin{vmatrix} mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{vmatrix} \quad \vec{F}_f \begin{vmatrix} -\eta v_1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{R} \begin{vmatrix} 0 \\ R \end{vmatrix}$$

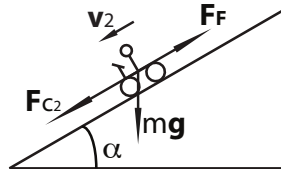
La deuxième loi de Newton donne $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Projeté sur Ox , $mg \sin \alpha - \eta v_1 = 0$

On en tire : $\eta = \frac{mg \sin \alpha}{v_1}$



Cas 2 : le cycliste pédale et amène la puissance utile (qui fait avancer) P_c . Il roule à v_2 (constante). Dans un bilan d'énergie cinétique, il faut inclure le travail correspondant $P_c dt$.



durant un interval de temps dt

$$dE_c = \delta W^{m\vec{g}} + \delta W^{\text{frottements}} + P_c dt$$

Comme la vitesse est constante, l'énergie cinétique aussi, $dE_c = 0$. Durant dt le cycliste parcourt dx . Sa variation d'altitude est $dx \sin \alpha$

$$\delta W^{m\vec{g}} = mg dx \sin \alpha$$

La force de frottements est $\vec{F}_f = -\eta v_2 \vec{e}_x$, donc

$$\delta W^{\text{frottements}} = -\eta v_2 dx$$

Donc

$$dE_c = 0 = P_c dt + mg \sin \alpha dx - \eta v_2 dx$$

En divisant par dt

$$P_c = -mg \sin \alpha \frac{dx}{dt} + \eta v_2 \frac{dx}{dt}$$

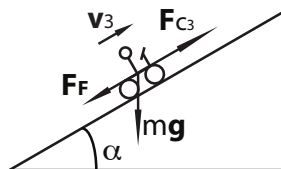
Or $\frac{dx}{dt} = v_2$

La puissance développée est donc

$$P_c = \eta v_2^2 - mg \sin \alpha v_2$$

Cas 3 : le cycliste monte à $\vec{v}_3 = v_3 \vec{e}_x$ en développant la même puissance P_c .

Attention v_3 est algébrique, quand le cycliste monte, il est négatif car l'axe (Ox) est orienté vers le bas



De la même manière qu'en 2,

$$dE_c = 0 = \delta W^{m\vec{g}} + \delta W^{\text{frottements}} + P_c dt$$

$$0 = mg dx \sin \alpha - \eta v_3 dx + P_c dt$$

Quand le cycliste monte, $v_3 < 0$, et $dx < 0$ donc le travail du poids est négatif (logique) et le travail des frottements aussi (comme toujours)

Donc

$$P_c = -mg \sin \alpha v_3 + \eta v_3^2$$

En combinant les cas 2 et 3, comme P_c est le même :

$$\eta v_2^2 - mg \sin \alpha v_2 = \eta v_3^2 - mg \sin \alpha v_3$$

$$\eta(v_3^2 - v_2^2) = mg \sin \alpha(v_3 - v_2)$$

$$\eta(v_3 - v_2)(v_3 + v_2) = mg \sin \alpha(v_3 - v_2)$$

Le cas $(v_3 - v_2) = 0$ correspondrait au cas où le cycliste descend, mais on a pris le cas où il monte, donc on peut simplifier par $(v_3 - v_2)$

$$\eta(v_3 + v_2) = mg \sin \alpha$$

Avec le cas 1 on a vu $mg \sin \alpha = \eta v_1$ Donc

$$v_3 = v_1 - v_2$$

Qui est bien négatif, la vitesse est orientée vers le haut de la pente.

Solution 3

- a) Comme il n'y a pas de force de frottement, le système est conservatif, et il y a conservation de l'énergie mécanique entre le point A et le point B :

$$\Delta E_m = 0 \iff E_m(A) = E_m(B) \iff \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg2R$$

$$\iff \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - mg2R$$

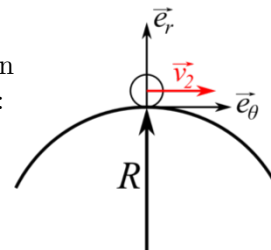
$$\iff v_2^2 = v_1^2 - 4gR$$

$$\iff v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4gR}$$

- b) La balle arrive au sommet à une vitesse v_2 . On fait un bilan des forces au point B (système de coordonnées polaires) :

— Le poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_r$

— La réaction du support : $\vec{N} = N\vec{e}_r$



L'accélération en coordonnées polaires est indiquée dans le formulaire (nb : on a ici un rayon constant R) :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

On a par ailleurs en B : $\dot{\theta} = \frac{v_2}{R}$ (car la vitesse est tangentielle) On projette la deuxième loi de Newton sur le vecteur :

On projette la deuxième loi de Newton sur le vecteur \vec{e}_r

$$-m\frac{v_2^2}{R} = N - mg \implies N = mg - m\frac{v_2^2}{R}$$

Pour qu'il n'y ait pas de décollage, il faut que $N > 0$: $mg - m\frac{v_2^2}{R} > 0 \implies v_2^2 < gR$
En utilisant la relation trouvée dans la question 1, on a :

$$v_1^2 - 4gR < gR \\ v_1 < \sqrt{5gR}$$

La vitesse limite est donc : $v_m = \sqrt{5gR}$

Solution 4

Entre **A** et **B**, on a la conservation de l'énergie mécanique qui donne :

$$E_p^A + \underbrace{E_c^A}_{=0} = \underbrace{E_p^B}_{=0} + E_c^B$$

soit

$$E_c^B = mgh$$

Entre **B** et **C**, la variation d'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces :

$$E_c^C - E_c^B = W_{\vec{F}_{tot}}^{B \rightarrow C} = \int_B^C \vec{F}_{tot} \cdot d\vec{r}$$

Or entre ces deux points, seule la force de frottement F_f travaille car $\vec{P} \perp d\vec{r}$ et $\vec{R} \perp d\vec{r}$.

$$W_{\vec{F}_{tot}}^{B \rightarrow C} = \int_B^C -\mu_c R \cdot dr = \int_B^C -\mu_c mg dr$$

On a donc finalement

$$E_c^C - E_c^B = -\mu_c mgl$$

Au niveau du ressort, toute l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle de ressort.

$$E_c^C = E_p^k = \frac{1}{2}kd^2$$

Finalement on trouve que

$$\frac{1}{2}kd^2 - mgh = -\mu_c mgl$$

et

$$\mu_c = \frac{h}{l} - \frac{kd^2}{2mgl}$$

AN : $\mu_c = 0.33$

Solution 5

1. Comme on néglige les forces de frottement, on peut appliquer le théorème de la conservation de l'énergie entre le haut de la pente et le bout de la rampe :

$E_M(\text{haut}) = E_p(\text{haut}) + E_c(\text{haut}) = E_M(\text{bout}) = E_p(\text{bout}) + E_c(\text{bout})$. Si on prend l'origine du potentiel en haut de la rampe, on a : $E_p(\text{haut}) = 0$ et $E_p(\text{bout}) = -mgH$. De plus, $E_c(\text{haut}) = 0$ et $E_c(\text{bout}) = \frac{1}{2}mv_0^2$. Donc on se retrouve avec $0 = -mgH + \frac{1}{2}mv_0^2$, soit :

$$v_0 = \sqrt{2gH}$$

2. On a ici un mouvement balistique avec comme accélération, avec une accélération que l'on peut projeter sur un repère à 2 dimensions (Oxy), en prenant l'origine au bout de la rampe :

$$\vec{a} = cte = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha t \\ v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{pmatrix}$$

Soit P la portée du saut de Bob. On veut $P > d$. Pour t_P tel que $r_x(t_P) = P$, on a $r_y(t_P) = 0$. Soit $v_0 \sin \alpha t_P - \frac{1}{2}gt_P^2 = 0$. Donc $t_P = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Finalement, $P = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Et on cherche H telle que $P > d$, soit $\frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} > d \iff \frac{2(2gH) \sin \alpha \cos \alpha}{g} > d$

$$H > \frac{d}{2 \sin 2\alpha}$$

3. Pour calculer facilement la vitesse finale, on applique la loi de la conservation de l'énergie : La variation de l'énergie mécanique du système est égale au travail des forces de frottement. Soient E_M^H et E_M^B l'énergie du système en haut de la pente et au bout de la rampe, respectivement.

$$E_M^B - E_M^H = W_{H-B} = \int_{rampe} \vec{f}_f d\vec{l}$$

Comme la force de frottements est colinéaire au déplacement, de sens opposé, et constante tout au long de la rampe, on peut écrire $W_{H-B} = -l\|\vec{f}_f\|$.

De plus, en régime dynamique, $\|\vec{f}_f\| = \mu_c\|\vec{N}\|$, avec $\|\vec{N}\|$ la réaction normale du support, qui compense exactement la composante du poids, donc $\|\vec{N}\| = mg \cos \alpha$ (cf. schéma). Donc finalement $W_{H-B} = -\mu_c mgl \cos \alpha$.

De même que précédemment, on calcule la variation d'énergie totale entre le haut de la pente et le bout de la rampe :

$$E_M^B - E_M^H = E_p^B - E_p^H + E_c^B - E_c^H, \text{ soit } E_M^B - E_M^H = -mgH + \frac{1}{2}mv_f^2.$$

Finalement, on a : $-mgH + \frac{1}{2}mv_f^2 = -\mu_c mgl \cos \alpha$, donc :

$$v_f = \sqrt{2gH - 2\mu_c gl \cos \alpha}$$