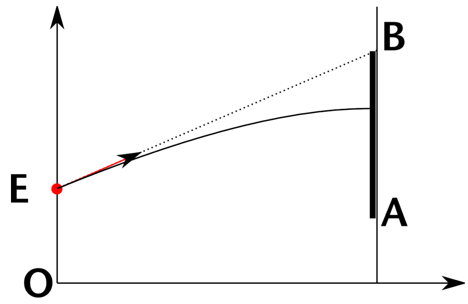
Solutions

Solution 1



$$E = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_E}{x_B} = \frac{y_B - y_E}{x_A}$$

On en tire donc :

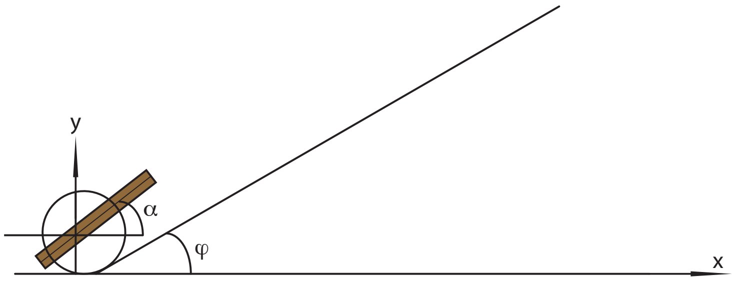
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \alpha) t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha) t + y_E \end{pmatrix}$$

La boulette arrive sur le mur à $t_A = \frac{x_A}{(v_0 \cos \alpha)}$. La coordonnée en y est alors donnée par

$$\begin{aligned} y(t_A) &= -\frac{1}{2} g t_A^2 + (v_0 \sin \alpha) t_A + y_E \\ &= -\frac{g x_A^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + (\tan \alpha) x_A + y_E \\ &= -\frac{g x_A^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + (\tan \alpha) x_A + y_E \\ &= -\frac{g x_A^2}{2 v_0^2} (1 + (\frac{y_B - y_E}{x_A})^2) + \frac{y_B - y_E}{x_A} x_A + y_E \\ &= -\frac{g}{2 v_0^2} (x_A^2 + (y_B - y_E)^2) + y_B \end{aligned}$$

A.N. : $y(t_A) = 1.98$ m. La boulette arrive donc sur le mur à 1.98 m du sol.
Le tableau est touché.

Solution 2



Système : obus ; référentiel : terrestre ; repère $(O\vec{x}\vec{y})$.
Remarque : il vaut mieux prendre ce repère car dans ce cas les équations du mouvement sont plus faciles à écrire (accélération selon $(O\vec{y})$ seulement).
Pour l'obus tiré à $t = 0$ depuis O à $\vec{v}_0$, on a :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_{ob} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos\alpha)t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \end{pmatrix}$$

L'obus tombe sur la colline quand la courbe décrite par l'obus croise l'équation de la colline $y = x \tan\varphi$.
L'obus tombe en $P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ et donc il faut que $y_p = x_p \tan\varphi$.

$$\vec{r}_p = \begin{cases} x_p = (v_0 \cos\alpha)t_p & (1) \\ y_p = -\dfrac{1}{2}gt_p^2 + (v_0 \sin\alpha)t_p & (2) \end{cases}$$

$$y_p = x_p \tan\varphi \qquad (3)$$

Nous avons 3 équations à 3 inconnues x_p, y_p, t_p. On cherche x_p ou y_p...
Eliminons t_p : (1) $\Rightarrow t_p = \frac{x_p}{v_0 \cos\alpha}$.

$$\begin{cases} y_p = -\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x_p}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (v_0 \sin\alpha)\dfrac{x_p}{v_0 \cos\alpha} \\ y_p = x_p \tan\varphi \end{cases}$$

En combinant ces deux équations, on obtient

$$x_p \tan\varphi + \frac{1}{2}g\frac{1}{v_0^2 \cos^2\alpha}x_p^2 - \tan\alpha x_p = 0$$

On en tire :

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x_p^2 - (\tan\alpha - \tan\varphi)x_p = 0 \Rightarrow x_p = 0 \text{ (sans intérêt)}$$

ou alors

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_p = \tan\alpha - \tan\varphi$$

Ainsi :

$$\boxed{x_p = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}[\tan\alpha - \tan\varphi]}$$

donc :

$$\boxed{l = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha[\tan\alpha - \tan\varphi]}{g\cos\varphi}}$$

Moyennant quelques transformations trigonométriques, on pourrait également écrire

$$l = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)}{\cos^2\varphi}$$

Solution 3

1. Les équations du mouvement sont :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ -gt + v_0\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha\, t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement au point L donnent :

$$\begin{cases} L = v_0\cos\alpha\, t_f \\ 0 = -\frac{1}{2}gt_f^2 + v_0\sin\alpha\, t_f \end{cases}$$

Variante 1 Nous combinons ces deux équations pour obtenir

$$\begin{cases} t_f = \dfrac{L}{v_0\cos\alpha} \\ 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{gL}{v_0^2} \end{cases}$$

Sachant que $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, nous obtenons $\sin 2\alpha = \frac{gL}{v_0^2}$, ce qui nous fait deux angles de tir, puisque $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$.

Variante 2 Nous réarrangeons ces deux équations pour obtenir

$$\begin{cases} v_0\cos\alpha = \dfrac{L}{t_f} \\ v_0\sin\alpha = \frac{1}{2}gt_f \end{cases}$$

En additionnant le carré de chacune de ses équations, nous obtenons

$$v_0^2 = \frac{L^2}{t_f^2} + \frac{1}{4}g^2t_f^2$$

qui nous permet de trouver, en utilisant la formule de Viet :

$$t_f^2 = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2L^2}}{\frac{1}{2}g^2}$$

Les deux solutions donnent les temps de vol sur chacune des trajectoires ; les angles sont obtenus grâce à la formule $\cos\alpha = \frac{L}{v_0 t_f}$

2. Temps de tir des deux boules (variante 1) :

$$t_{1,2} = \frac{L}{v_0 \cos\alpha_{1,2}}$$

et donc :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_2} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right)$$

3. A.N. Les angles de tir sont : $\alpha_2 = 18.9°$ et $\alpha_1 = 71.1°$; les temps de vol deviennent $t_1 = 1.32$ s, $t_2 = 3.86$ s, et donc $\Delta t = 2.54$ s.

Solution 4

Nous considérons d'abord que la fronde et le caillou sont dans un même plan parallèle au sol.

Le référentiel est terrestre et le repère (O, x, y) où O est le point d'attache de la fronde. Soit P le point d'impact du caillou. Alors

$$P = \begin{pmatrix} l \\ -h \end{pmatrix}$$

La première chose à faire est de calculer la vitesse v_0 que doit avoir le caillou pour atteindre P. Puis, avec v_0, nous serrons capable de calculer la vitesse angulaire de la fronde...

La balistique nous donne :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

L'arrivée au sol se fait en $P = \begin{pmatrix} l \\ -h \end{pmatrix}$ à t_p, soit

$$\vec{r}(t_p) = \begin{pmatrix} v_0 t_p = l \\ -\dfrac{1}{2}gt_p^2 = -h \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}(4)\\(5)\end{matrix}$$

De (4), nous avons $t_p = \frac{l}{v_0}$ que nous injectons dans (5) : $\frac{1}{2}g\frac{l^2}{v_0^2} = h$, dont on tire :

$$\boxed{v_0 = l\sqrt{\frac{g}{2h}}}$$

De la relation $v_0 = \omega_0 R$, nous avons :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{l}{R}\sqrt{\frac{g}{2h}}}$$

A.N. : $\omega_0 = \frac{10}{0.30}\sqrt{\frac{9.81}{2\cdot 1.8}} \simeq 55$ rad·s^{-1}.

Il est possible de réduire la vitesse de rotation de la fronde pour atteindre la cible en modifiant l'angle de tir. Pour le déterminer, il s'agit de minimiser la vitesse par rapport à cet angle.

En ajoutant un angle de tir défini par rapport à l'horizontale au problème (pour rappel $-\arctan\frac{h}{l} < \alpha < \frac{\pi}{2}$), nous trouvons l'équation de la vitesse de la façon suivante :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ -gt + v_0\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t\cos\alpha \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow \begin{cases} v_0 t_p\cos\alpha = l & (6) \\ -\dfrac{1}{2}gt_p^2 + v_0 t_p\sin\alpha = -h & (7) \end{cases}$$

De (6), on tire : $t_p = \frac{l}{v_0\cos\alpha}$, que l'on injecte dans (7) : $-\frac{1}{2}g\frac{l^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + l\tan\alpha = -h$, soit $\frac{1}{2}g\frac{l^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = h + l\tan\alpha$, et donc finalement :

$$\boxed{v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h+l\tan\alpha)}} \Rightarrow \omega_1 = \frac{l}{R\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h+l\tan\alpha)}}}$$

Minimiser v_0 correspond à déterminer $\frac{dv_0}{d\alpha} = 0$, qui peut être résolu numériquement avec une bonne calculatrice...ou bien à littéralement après un astuciaux développement. Récrivons v_0 :

$$v_0(\alpha) = \sqrt{\frac{gl^2/2}{\cos^2\alpha(h+l\tan\alpha)}} = \sqrt{\frac{cte}{f(\alpha)}}$$

avec $f(\alpha) = \cos^2\alpha(h + l\tan\alpha)$. Comme la fonction $1/x$ est monotone décroissante pour $x > 0$ et la fonction $\sqrt{x}$ monotone croissante, minimiser v_0 revient à maximiser $f(x)$. On cherche donc la valeur de α telle que $df/d\alpha = 0$. C'est déjà moins horrible que de travailler avec v_0...

$$f(\alpha) = h\cos^2\alpha + l\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{df}{d\alpha} = -2h\sin\alpha\cos\alpha + l(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -h\sin(2\alpha) + l\cos(2\alpha)$$

Cette expression s'annule seulement quand $l\cos 2\alpha - h\sin 2\alpha = 0$, c.-à.d. quand $\tan 2\alpha = \frac{l}{h}$. L'expression de angle de tir optimal devient alors relativement simple

$$\boxed{\alpha_{opt} = \frac{1}{2}\arctan\frac{l}{h}}$$

A.N. : $\alpha_{opt} = 39.8°$, $\omega_1 = 30,2$ rad·s^{-1}