Solutions

Solution 1 *Drone days à l'EPFL*

1. Trajectoire A : La trajectoire est une droite selon une diagonale du terrain, le mouvement est un mouvement rectiligne uniforme (MRU)

   Trajectoire B : La trajectoire dessinée par le drone est parabolique, selon l'axe x, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré (MRUA) et selon l'axe z, le mouvement est rectiligne uniforme. La combinaison des deux donne une trajectoire parabolique dans le plan xz.

2.
$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0.4t \\ 0 \\ 0.15 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\vec{a}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\vec{a}_B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3.
$$||\vec{v}_A|| = \sqrt{1.44 + 0.25 + 0.4} = \sqrt{1.73} \approx 1.32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
$$||\vec{v}_B|| = \sqrt{0.16t^2 + 0 + 0.0225} = \sqrt{0.16t^2 + 0.0225} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
$$||\vec{a}_A|| = 0\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$
$$||\vec{a}_B|| = 0.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

4. Calcul du vecteur $\vec{r}_{AB}$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0.2t^2 - 1.2t \\ -0.5t + 5 \\ -0.05t \end{pmatrix}$$

Calcul de sa norme en fonction de t :

$$||\vec{r}_{AB}|| = \sqrt{(0.2t^2 - 1.2t)^2 + (-0.5t + 5)^2 + (-0.05t)^2}$$

Si on cherche la distance minimum entre les drones, on cherche le minimum de la norme du vecteur $\vec{r}_{AB}$. On dérive donc la norme du vecteur par raport au temps. Et on résout $\frac{d||\vec{r}_{AB}||}{dt} = 0$. Si on doit réaliser le calcul à la main, il est plus simple de considérer $||\vec{r}_{AB}||^2$, car la racine carrée ne change pas le minimum de la fonction et dériver un polynôme est plus simple que de dériver un polynôme dans une racine carrée.

Cela permet de trouver pour quel temps la distance est minimum. Il ne reste plus qu'à injecter ce temps dans la norme de $\vec{r}_{AB}$ pour connaitre cette distance.

On peut aussi résoudre ce problème de manière graphique : on trace la distance entre les drones en fonction du temps et on peut en déduire pour quel temps cette distance est minimale.

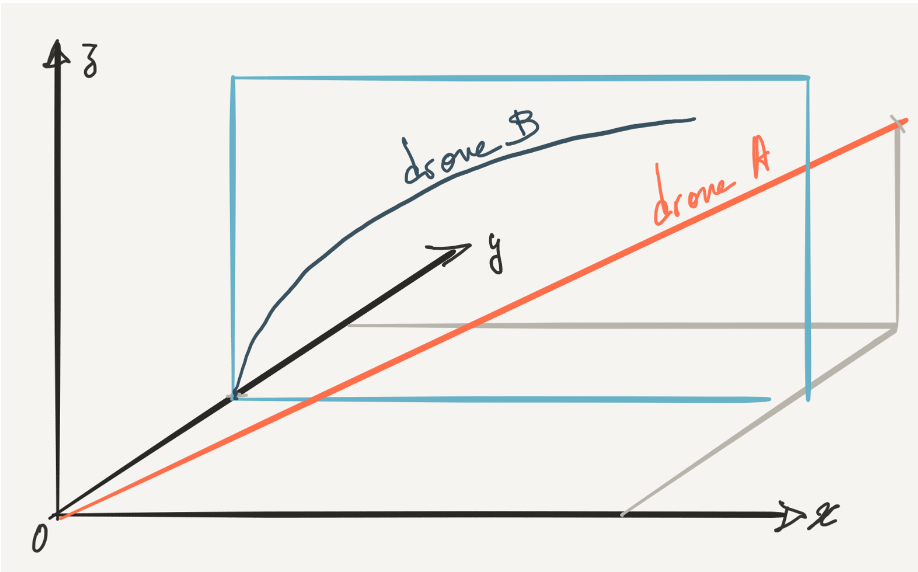


FIGURE 1 – Trajectoires schématisées des drones

Solution 2

1. $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40\sin(0.2t) \\ 40\cos(0.2t) \\ 3 \end{pmatrix}$$

   L'unité étant évidemment des m·s^{-1}.

   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\cos(0.2t) \\ -8\sin(0.2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   L'unité étant évidemment des m·s^{-2}.

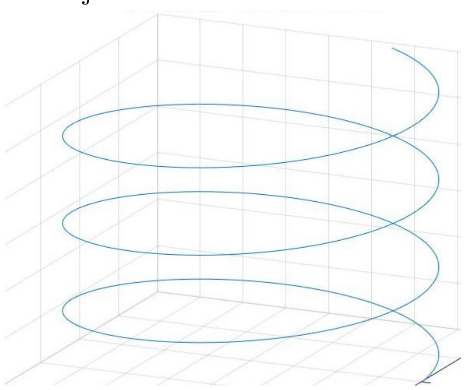
   La vitesse scalaire et l'accélération scalaire sont données par les norme des vecteurs vitesse et accélération respectivement :

   $$||\vec{v}|| = \sqrt{1600\sin^2(0.2t) + 1600\cos^2(0.2t) + 9} = \sqrt{1600 + 9} \approx 40.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

   $$||\vec{a}|| = \sqrt{64\sin^2(0.2t) + 64\cos^2(0.2t) + 0} = \sqrt{64} = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2. Seule la coordonnée z nous intéresse : nous cherchons t tel que $z(t) = 2000$, soit $t = \frac{1400}{3}$ qui font 467 s.

3. La trajectoire est hélicoïdale.



4. L'axe z des coordonnées cylindriques doit être aligné avec l'axe de l'hélice, ce qui n'est pas le cas de l'axe Oz des coordonnées cartésiennes. Ainsi, le système de coordonnées cylindriques doit être centré en $A = (100, 500, 0)$. Les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) évoluent de la manière suivante :

   $$\rho(t) = 200 \text{ m}, \quad z(t) = 3t + 600, \quad \varphi(t) = \omega t \tag{1}$$

   La valeur de la vitesse angulaire ω apparaît directement dans les fonctions trogonométriques sin et cos de l'expression de la trajectoire, à savoir $\omega = 0.2$ rad s^{-1}.

Solution 3

1. La vitesse angulaire, en radians/s s'obtient à partir du nombre de tours par minute :

$$\omega_m = \frac{2\pi N_m}{60}$$

2. Dans un mouvement circulaire $v = R\omega$

$$v_m = \frac{2\pi R N_m}{60}$$

3. Dans un mouvement circulaire $a_n = R\omega^2$

$$a_n = R\Big[\frac{2\pi N_m}{60}\Big]^2$$

4. $\omega_m = 1571 \mathrm{rad/s}$; $v_m = 314 \mathrm{m/s}$; $a_n = 4.5 \times 10^5 \mathrm{m/s^2}$
5. La centrifugeuse met N_f tours donc $\theta_m = 2\pi N_f$ radians pour atteindre sa vitesse max, avec une accélération angulaire α constante.
   On a donc

$$\omega = \alpha t$$
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

   à t_m elle a atteint sa vitesse max, et elle a parcouru θ_m. Cela nous donne deux équations pour trouver α en éliminant t_m

$$\omega_m = \alpha t_m$$
$$\theta_m = \frac{1}{2}\alpha t_m^2$$

$$\omega_m^2 = \alpha^2 t_m^2$$

$$t_m^2 = \frac{\omega_m^2}{\alpha^2}$$

$$\theta_m = 2\pi N_f = \frac{1}{2}\alpha\frac{\omega_m^2}{\alpha^2}$$

$$\alpha = \frac{\omega_m^2}{4\pi N_f} = \frac{4\pi^2 N_m^2}{4\times 60^2 \pi N_f} = \frac{\pi N_m^2}{60^2 N_f}$$

6.
$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t} = R\alpha = \frac{R\pi N_m^2}{60^2 N_f}$$

7. Il faut exprimer séparément ces grandeurs dans la phase d'accélération, et dans la phase ou la vitesse angulaire est constante.
   – entre 0 et t_m

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{\pi N_m^2}{60^2 N_f} t$$

$$\vec{v} = R\frac{\pi N_m^2}{60^2 N_f} t\vec{\tau}$$

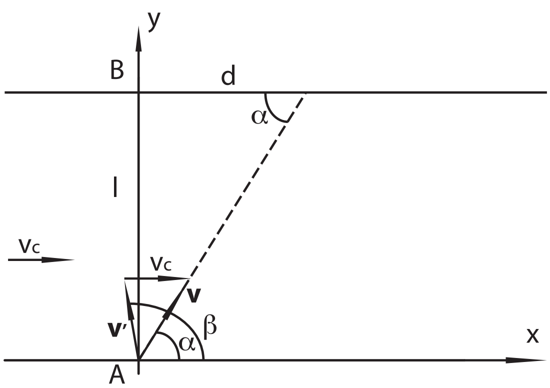
$$\vec{a} = R\omega^2\vec{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = R\Big[\frac{\pi N_m^2}{60^2 N_f} t\Big]^2\vec{n} + \frac{R\pi N_m^2}{60^2 N_f}\vec{\tau}$$

– après t_m

$$\vec{v} = R\omega_m\vec{\tau} = R\frac{2\pi N_m}{60}\vec{\tau}$$

$$\vec{a} = R\omega_m^2\vec{n} = R\Big[\frac{2\pi N_m}{60}\Big]^2\vec{n}$$

Solution 4



vitesse du courant : $\vec{v}_c$
vitesse par rapport au courant : $\vec{v}'$ avec $|\vec{v}'| = v'$ connu (v_{rame})
vitesse par rapport à la rive : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_c$

Composantes des vitesses :

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} v_c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{v}' = \begin{pmatrix} v'\cos\beta \\ v'\sin\beta \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_c + v'\cos\beta \\ v'\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\tan\alpha = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha} = \frac{v'\sin\beta}{v_c + v'\cos\beta} = \frac{l}{d}$$

Donc :

$$\boxed{d = l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}}$$

Le temps de course sur la rive est donc donné par

$$t_c = \frac{d}{v_{course}} = l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}\frac{1}{v_{course}}$$

Le temps de traversée est donné par :

$$t_t = \frac{l}{v'\sin\beta}$$

Le temps total est donc :

$$\boxed{t_{tot} = \frac{l}{v'\sin\beta} + l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}\frac{1}{v_{course}} = l\left[\frac{v_{course} + v_c + v'\cos\beta}{v_{course}\cdot v'\sin\beta}\right]}$$

On cherche à minimiser en fonction de β :

$$\frac{\mathrm{d}t_{tot}}{\mathrm{d}\beta} = l\cdot\frac{-v_{course}v'\sin\beta\cdot v'\sin\beta - v_{course}v'\cos\beta\left[v_{course} + v_c + v'\cos\beta\right]}{\left[v_{course}\cdot v'\sin\beta\right]^2} = f(\beta)$$

et on cherche $f(\beta) = 0$.

$$\begin{aligned} -v'^2 v_{course}\sin^2\beta - v'v_{course}^2\cos\beta - v_c v' v_{course}\cos\beta - v_{course}v'^2\cos^2\beta &= 0 \\ \left(\cancel{v'}v_{course}^{\cancel{2}} + v_c\cancel{v'}\cancel{v_{course}}\right)\cos\beta + v'^{\cancel{2}}\cancel{v_{course}} &= 0 \\ (v_{course} + v_c)\cos\beta + v' &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{-v'}{v_c + v_{course}}}$$

A.N. : $\beta = 1.98$ (équivalent à 113.2°, soit 23.2° vers l'amont). Le temps de course sera alors de 80.5 s et la traversée de 1160 s, soit un temps total de 1241.5 s (20.7 min).