

Solutions

Solution 1

1. $\frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t)$
2. $\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t)$
3. $\frac{d}{dt} \tan(t) = \frac{\sin(t)^*}{\cos(t)} = \frac{\cos(t)\cos(t) + \sin(t)\sin(t)}{\cos(t)^2} = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$
4. $\frac{d}{dt} \ln(t) = \frac{1}{t}$
5. $\frac{d}{dt} \sqrt{t} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$
6. $\frac{d}{dt} t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1}$
7. $\frac{d}{dt} \sin(t) \cos(t) = \sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t) \cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
8. $\frac{d}{dt} t \cos(t) = \cos(t) - t \sin(t)$
9. $\frac{d}{dt} t \cos(t) \sin(t)** = \cos(t) \sin(t) - t \sin^2(t) + t \cos^2(t)$
10. $\frac{d}{dt} \sin(t^2) = 2t \cos(t^2)$

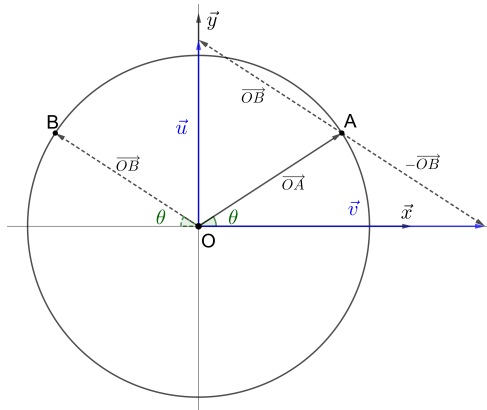
$$*\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' + f' \cdot \frac{1}{g} = f \left(\frac{-g'}{g^2}\right) + \frac{f'}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$**(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

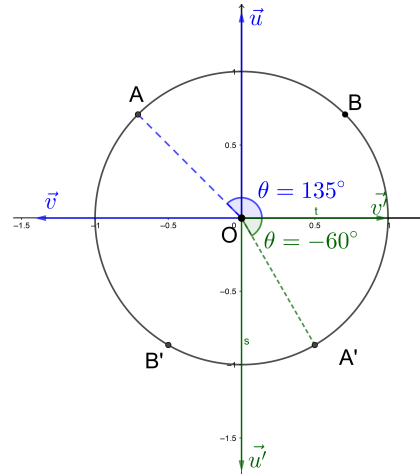
Solution 2

a) $\vec{OA} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} = R \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ c) $\vec{u} = R \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = R \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

b)



d)

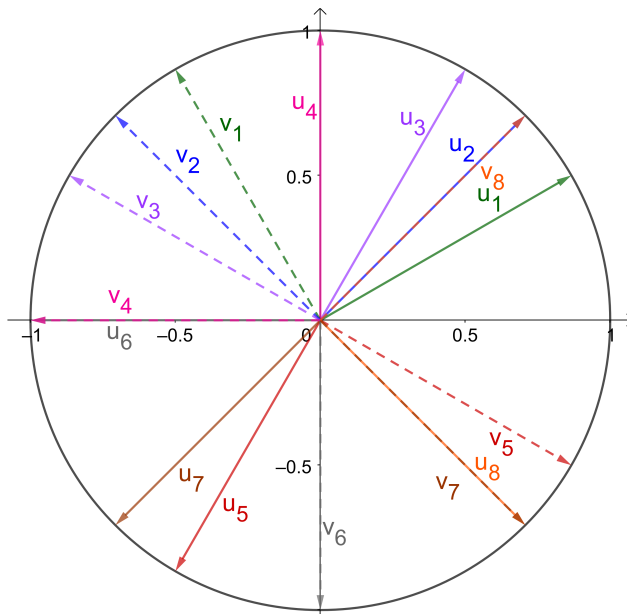


Solution 3

1. $\frac{d}{dt} \cos(\theta) = -\omega \sin \theta$
2. $\frac{d}{dt} \sin(\theta) = \omega \cos \theta$
3. $\frac{d}{dt} \tan(\theta) = \frac{\omega}{\cos^2 \theta} = \omega(1 + \tan^2 \theta)$
4. $\frac{d}{dt} e^{i\theta} = i\omega e^{i\omega t} = i\omega e^{i\theta}$
5. $\frac{d}{dt} \sin(\theta) \cos(\theta) = \omega \cos^2 \theta - \omega \sin^2 \theta = \omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

Solution 4

a)



b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$

c) Deux vecteurs sont perpendiculaires si leur produit scalaire vaut zéro :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \theta (-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta = 0$

Solution 5

1. L'analyse dimensionnelle donne, avec les unités suivantes :

accélération : $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

vitesse : $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

temps : s

position : m

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$
$$\text{m} = \underbrace{\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (\text{s})^2}_m + \underbrace{\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (\text{s})}_m + \underbrace{\text{m}}_m$$

2. ✂ Attention ! Il est important que tous les termes de la somme donnent des mètres.

(a) $\frac{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} \Rightarrow \text{s}^{-1} \neq \text{m}$ non

(b) $\frac{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}} \Rightarrow \text{s} \neq \text{m}$ non

(c) $\frac{\text{m}^2\cdot\text{s}^{-4}}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} \Rightarrow \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \neq \text{m}$ non

(d) $\frac{\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}}{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}} \Rightarrow \text{m}$ oui !

C'est donc (d)

Solution 6

1. $\frac{d}{dt} \cos(\theta) = \frac{d\theta(t)}{dt} (-\sin(\theta(t))) = -\dot{\theta} \sin(\theta)$
2. $\frac{d}{dt} \sin(\theta) = \dot{\theta} \cos(\theta)$
3. $\frac{d}{dt} \tan(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)} = \dot{\theta}(1 + \tan^2(\theta))$
4. $\frac{d}{dt} \ln(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\theta}$
5. $\frac{d}{dt} e^{i\theta} = i\dot{\theta}e^{i\theta}$
6. $\frac{d}{dt} \sin(\theta) \cos(\theta) = \dot{\theta} \cos^2(\theta) - \dot{\theta} \sin^2(\theta) = \dot{\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$
7. $\frac{d}{dt} \theta^\alpha = \alpha \dot{\theta} \theta^{\alpha-1}$
8. $\frac{d}{dt} \theta \cos(\theta) \sin(\theta) = \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) - \theta \dot{\theta} \sin^2(\theta) + \theta \dot{\theta} \cos^2(\theta)$

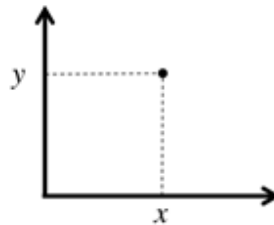
Solution 7

a) $\overrightarrow{OM} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$; $\vec{P} = P \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{T} = T \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$

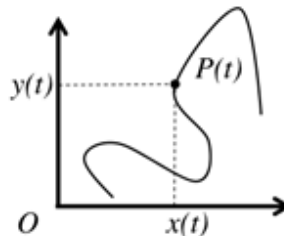
b) $\vec{P} = P \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$; $\vec{T} = T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution 8

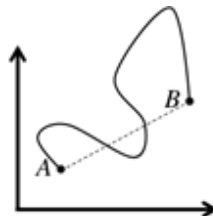
- a) Deux paramètres sont nécessaires pour repérer la position d'un point sur une table, par exemple les coordonnées x et y dans un repère orthonormé. On dit que le problème est à deux dimensions : « 2D ». Notez que le terme « dimension » fait ici référence aux dimensions spatiales, notion qui diffère de celle vue dans l'exercice 1.



- b) Le mouvement est décrit par la donnée des deux coordonnées en fonction du temps, $x(t)$ et $y(t)$.



- c) Dans notre repère 2D, la distance entre A et B est : $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Comme on le voit sur le schéma ci-dessous, cette valeur est plus petite que la distance parcourue par P (c'est la même uniquement si le trajet en ligne droite).



- d) la vitesse entre A et B est : $v_{AB} = \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\Delta t}$, où Δt est le temps de trajet de A à B . C'est une vitesse moyenne. Il n'y a pas relation à priori entre cette vitesse moyenne v_{AB} et les vitesses instantanées v_A et v_B . Par exemple, on peut imaginer que P parte à l'arrêt de A et s'arrête en B , avec une vitesse moyenne non nulle...