Compléments

Notation pour les dérivées

Il existe plusieurs notations pour la dérivée. Soit une fonction dérivable $f(x)$, on peut alors écrire sa dérivée comme :

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \tag{1}$$

Pour les dérivées secondes, on écrit :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \equiv f''(x) \tag{2}$$

Pour les fonctions dépendant du temps, on peut écrire ainsi :

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv f'(t) \equiv \dot{f} \tag{3}$$

Pour les dérivées secondes, on a la même logique :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \equiv f''(t) \equiv \ddot{f} \tag{4}$$

Définition d'une dérivée

Mesure de l'ampleur du changement de la valeur de la fonction par rapport à un petit changement de son argument.
Cela revient à l'équation suivante :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5}$$

Exemple pour $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x \tag{6}$$

Règles de dérivations

1) Produit

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{7}$$

2) Division

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{8}$$

3) Composition

$$[(f \circ g)(x)]' \equiv [(f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{9}$$

Exemple : on définit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^2$. On a donc que :

$$f(g(x)) = \sin(x^2) \tag{10}$$

Pour utiliser la règle de composition, on doit d'abord calculer $f'(x)$ et $g'(x)$:

$$f'(x) = \sin'(x) = \cos(x), \quad g'(x) = \left(x^2\right)' = 2x \tag{11}$$

Ce qui donne pour $f'(g(x))$:

$$f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2) \tag{12}$$

Et donc finalement :

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x \tag{13}$$

Dérivations de fonctions spéciales

1) Le sinus

On pose $f(x) = \sin(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \tag{14}$$

On utilise la relation trigonométrique suivante :

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{15}$$

On pose que $\alpha = x + h$ et $\beta = x$ et on remplace dans l'équation Eq.14 :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(\frac{x+h+x}{2})\sin(\frac{x+h-x}{2})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} \tag{16}$$

On divise par deux l'équation ci-dessus et on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \tag{17}$$

Or on sait que pour le sinus $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$. On applique donc ceci dans l'équation du dessus et on obtient finalement :

$$\lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{0}{2}\right) \cdot 1 = \cos(x) \tag{18}$$

La dérivée du cosinus peut se retrouver en utilisant $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, en appliquant ensuite la dérivée obtenue pour le sinus précédemment et en utilsant la relation $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$. On obtient alors : $\cos'(x) = -\sin(x)$.

2) L'exponentielle

On pose $f(x) = \exp(x) \equiv e^x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) \tag{19}$$

On pose $n = e^h - 1$ ce qui donne $n + 1 = e^h$ et en prenant le ln : $\ln(n + 1) = h$. On a donc que :

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{n}{\ln(n + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{1}{n}\ln(n + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\ln(n + 1)^{\frac{1}{n}}} \tag{20}$$

où on a utilisé dans la dernière égalité la propriété du logarithme suivante : $a{\cdot}\ln(x) = \ln(x^a)$. une des propriétés de l'exponentielle est qu'on peut la définir comme :

$$\lim_{h\to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = e \tag{21}$$

On obtient donc pour Eq.20 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\ln(n + 1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\ln(e)} = 1 \tag{22}$$

On remplace dans Eq.19 et obtient donc bien que $f'(x) = \exp(x)$

3) Logarithme

Pour trouver la dérivée du logarithme, on va utiliser une astuce et le résutat obtenu pour l'exponetielle. On commence par écrire par définition :

$$e^{\ln(x)} = x \tag{23}$$

Ensuite on dérive des deux côtés :

$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = x' \to e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x) = 1 \tag{24}$$

où on a utilisé la règle de composition pour calculer la dérivée de $e^{\ln(x)}$. On sait par définition que $e^{\ln(x)} = x$ et donc on obitent finalement :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \tag{25}$$