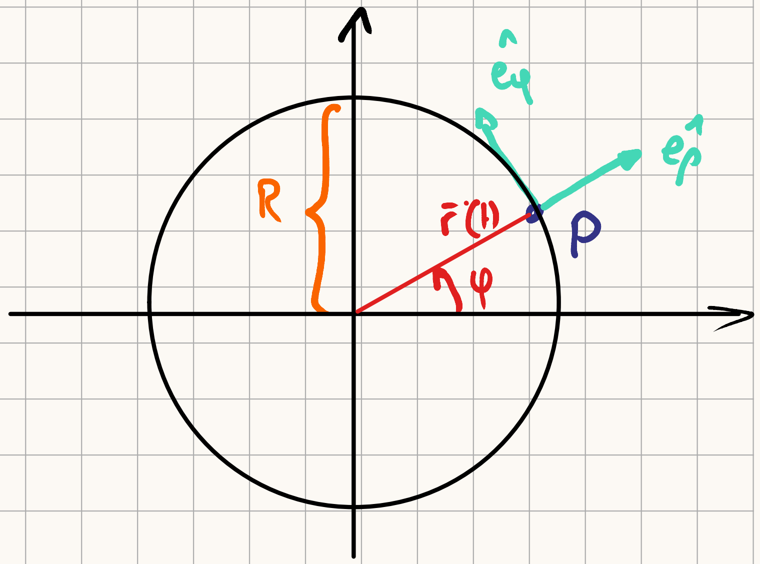
Application des coordonnées polaires au Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)



rayon constant $\Rightarrow \rho = cst = R \Rightarrow \ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0$

vitesse angulaire constante $\Rightarrow \dot{\varphi} = \omega = cste \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$$\vec{r} = \rho\, \hat{e}_\rho = R \cdot \hat{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \hat{e}_\rho + \dot{\varphi}\rho\, \hat{e}_\varphi = \omega \cdot R\, \hat{e}_\varphi$$

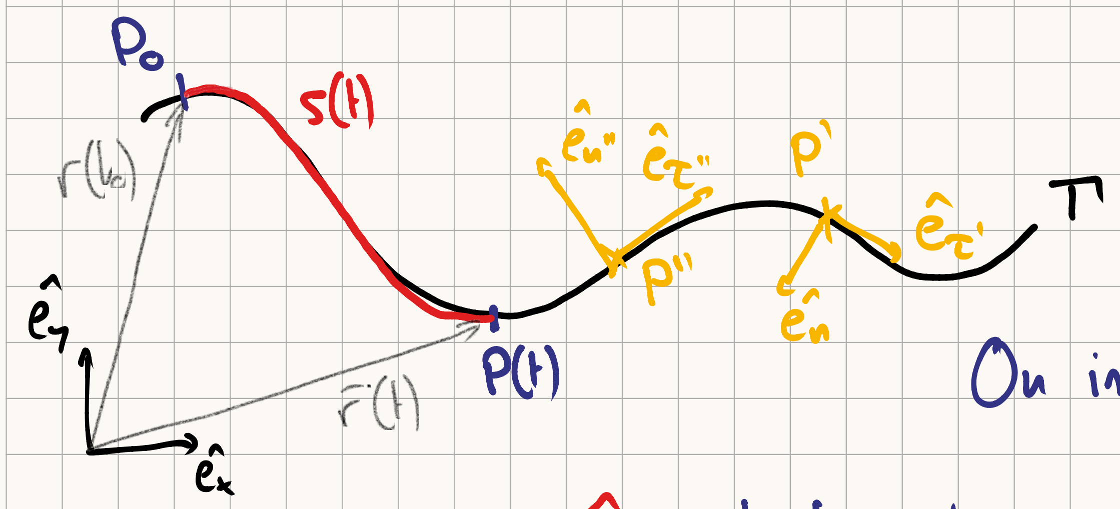
$$\vec{a} = (\cancelto{0}{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\varphi}^2)\, \hat{e}_\rho + (\cancelto{0}{2\dot{\rho}\dot{\varphi}} + \cancelto{0}{\rho\ddot{\varphi}})\, \hat{e}_\varphi = -R\omega^2\, \hat{e}_\rho$$

Ainsi, $v = \|\vec{v}\| = \omega R$ et $a = \|\vec{a}\|\ \omega^2 R$. La vitesse angulaire ω est aussi appelée pulsation, et est reliée à la fréquence f par $\omega = 2\pi f$.

3. Coordonnées curvilignes (repère de Frenet)

On étudie les grandeurs cinématiques d'un PM par rapport à sa position sur la trajectoire.

On introduit l'abscisse curviligne $s(t)$ qui correspond à la distance parcourue le long de Γ par rapport à un point de référence P_0. Celle-ci nous permet d'identifier la position d'un PM avec comme support la trajectoire Γ.



On introduit également le repère mobile $(P, \hat{e}_\tau, \hat{e}_n)$

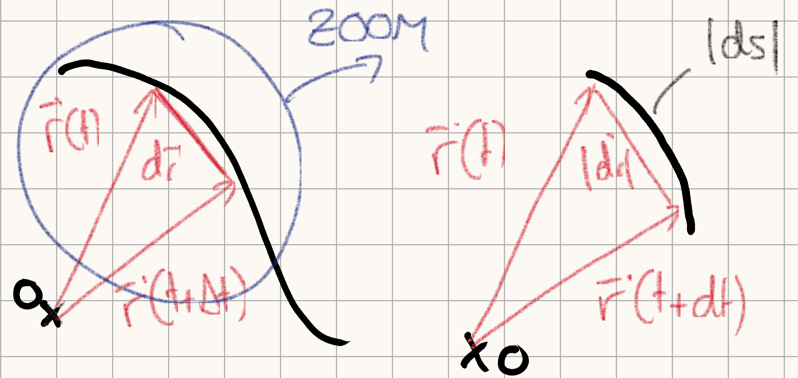
→ $\hat{e}_\tau$ est tangent à Γ, et va dans le sens de la circulation

→ $\hat{e}_n$ est $\perp$ à Γ, et pointe vers l'intérieur de la courbe.

Ce repère est appelé repère de Frenet

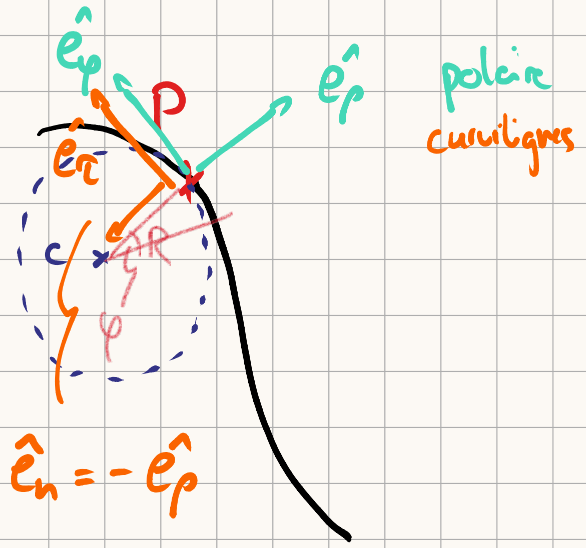
La vitesse vaut alors :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{e}_\tau = \underbrace{v}_{\text{vitesse scalaire}} \cdot \hat{e}_\tau$$



$d\vec{r}$ tq $d\vec{r} = |d\vec{r}| \cdot \hat{e}_\tau$

Pour calculer l'accélération, on s'intéresse à ce qu'il se passe localement autour de P, à l'aide des coordonnées polaires.



Le mouvement peut être approché par un arc de cercle d'angle φ, de rayon R. Ainsi, $s(t) = R \cdot \varphi(t)$.

$$\vec{a}_p = (\cancelto{0}{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\cancelto{0}{\dot{\rho}}\dot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi$$

$$= -R\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

$$= R\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_n + R\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\tau$$

Or, comme $s = \varphi \cdot R$, $\varphi = \frac{s}{R}$ $\Rightarrow$ $\dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{v}{R}$ et $\ddot{\varphi} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dt}$

Ainsi :

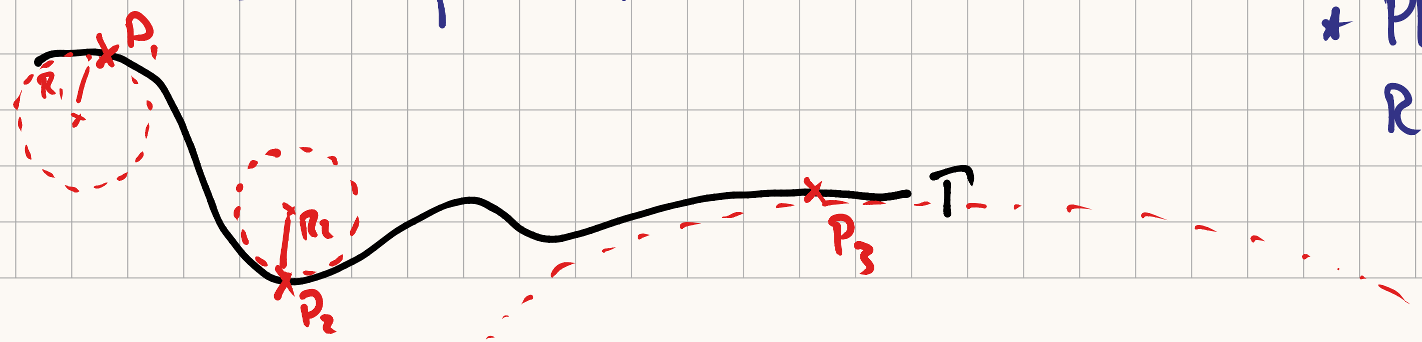
$$\vec{a} = R \cdot \frac{v^2}{R^2} \hat{e}_n + R \cdot \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} \hat{e}_\tau$$

$$= \underbrace{\frac{v^2}{R} \hat{e}_n}_{} + \underbrace{\frac{dv}{dt} \hat{e}_\tau}_{}$$

accélération centripète.
Changement de direction

accélération tangentielle
Changement de norme.

On peut généraliser ce cas à une courbe quelconque, où R est le rayon de courbure de Γ en P, qui correspond au rayon du cercle osculateur à la courbe au point P.



* Plus la courbe est "plate", plus R est grand.

4. Coordonnées cylindriques

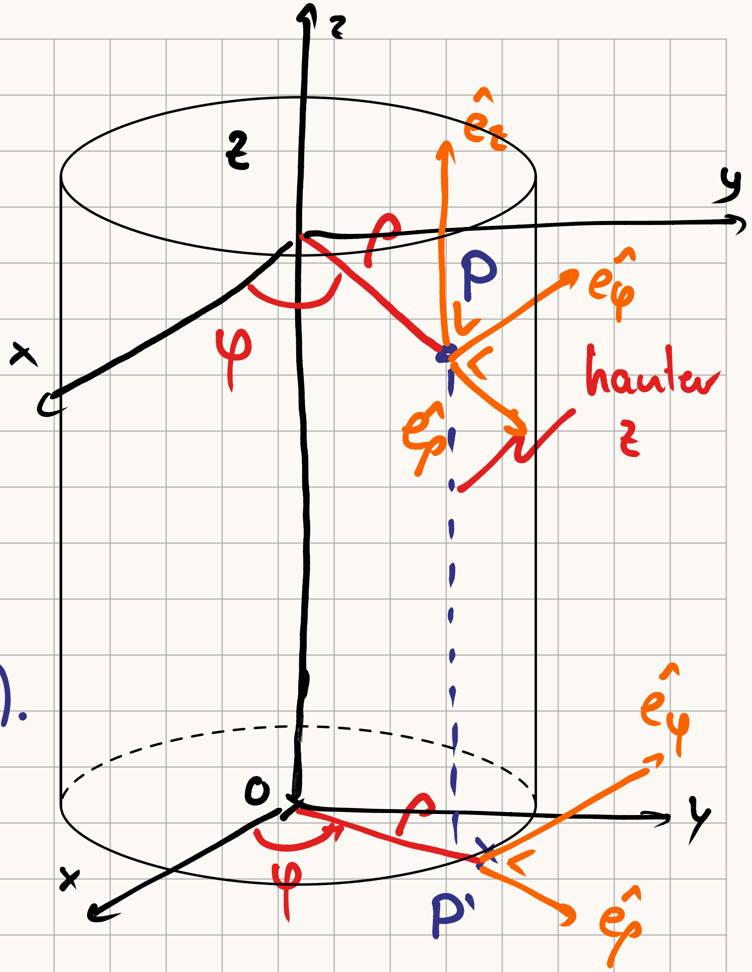
Il s'agit d'une extension des coordonnées polaires au cas 3D.

La grandeur ρ représente la distance à l'axe z.

" " φ est l'angle par rapport à l'axe x

" " z la hauteur par rapport au plan polaire (x, y).

On y associe le repère mobile $(P, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$.

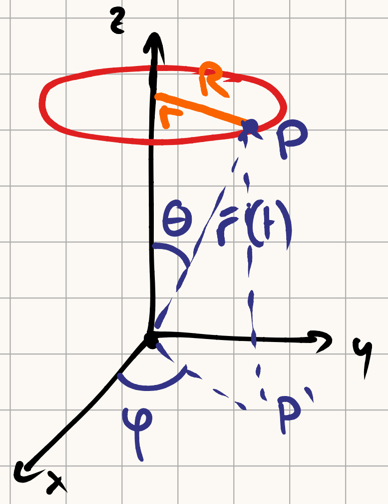


Ainsi : → la position : $\vec{r}(t) = \rho\,\hat{e}_\rho + z \cdot \hat{e}_z$ $\overrightarrow{OP}$

→ la vitesse : $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \dot{\varphi}\rho\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z$

→ l'accélération : $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$

Complément : mouvement circulaire ($\rho = R = cste$)

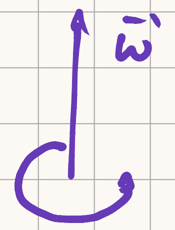


La vitesse en coord. cylindrique vaut :

$$\vec v = 0 \cdot \hat{e}_\rho + \dot\varphi R \, \hat{e}_\varphi + 0 \, \hat{e}_z = \dot\varphi R \, \hat{e}_\varphi$$

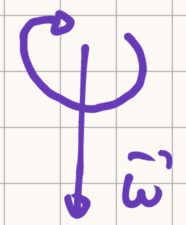
$$\|\vec v\| = \dot\varphi \cdot R = \dot\varphi \cdot r \cdot \sin\theta$$

On peut reconnaître l'expression de la norme du produit vectoriel entre $\vec r$ et un vecteur $\vec{\dot\varphi}$...



On introduit $\vec\omega$ le vecteur rotation (ou vitesse angulaire) tel que :

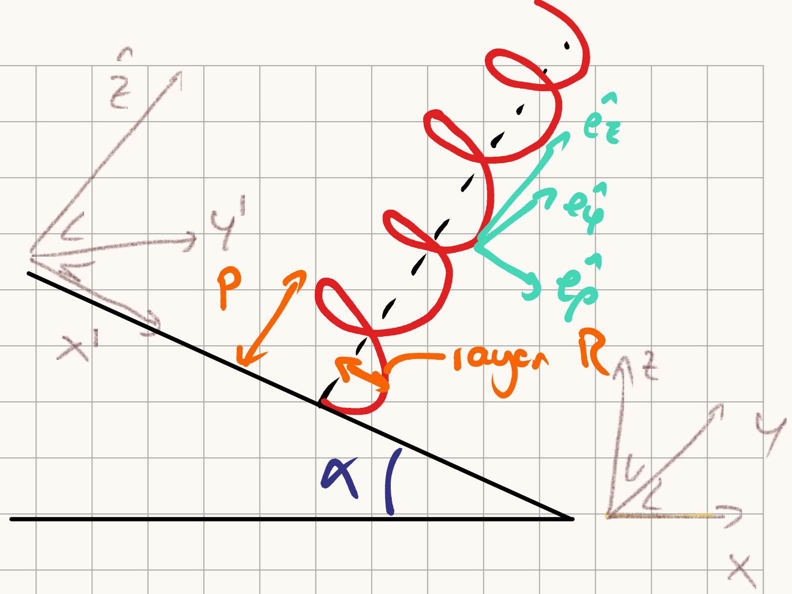
* $\vec\omega$ est de norme $\omega = \frac{v}{r}$
* $\vec\omega$ soit $\perp$ au plan contenant le cercle qui décrit la rotation.
* le sens de $\vec\omega$ est donné par la règle du tire-bouchon



$\Rightarrow$ $\vec v = \vec\omega \wedge \vec r$. Effectivement : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix}$

Application : vis d'Archimède, vitesse angulaire constante

Il s'agit d'une hélice cylindrique de rayon R, et d'élévation axe par tour p.



① Choix de coordonnées

$\Rightarrow$ coordonnées cylindriques

② Exprimons les contraintes :

$$\rho = cste = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \qquad z = \frac{p}{2\pi} \cdot \varphi$$

$$\dot{\varphi} = cste = \omega \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

③ Exprimons les grandeurs cinématiques

$$\vec{r}(t) = \rho \cdot \hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z = R\,\hat{e}_\rho + \frac{p}{2\pi} \cdot \varphi\,\hat{e}_z \Rightarrow d(t) = \|\vec{r}(t)\| = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{(2\pi)^2} \cdot \varphi^2}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z \overset{\text{contraintes}}{=} R\omega\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,e_z = R\omega\,\hat{e}_\varphi + \frac{p}{2\pi}\dot{\varphi}\,\hat{e}_z$$

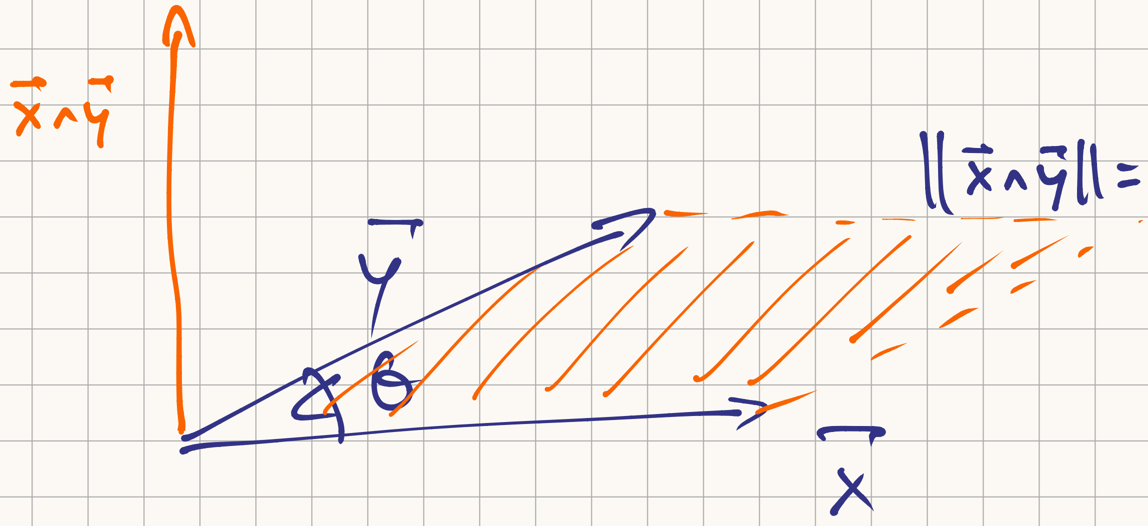
$\vec{a} = ???$

Produit vectoriel :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$(\vec{x} \times \vec{y})$

$$\Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$



$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin\theta$$