Cours 2 - mardi: 17.09.25

La semaine passée, on a vu ...

- → cinématique
- → approximation du PM
- → position $\vec{r}(t)$, équation horaire

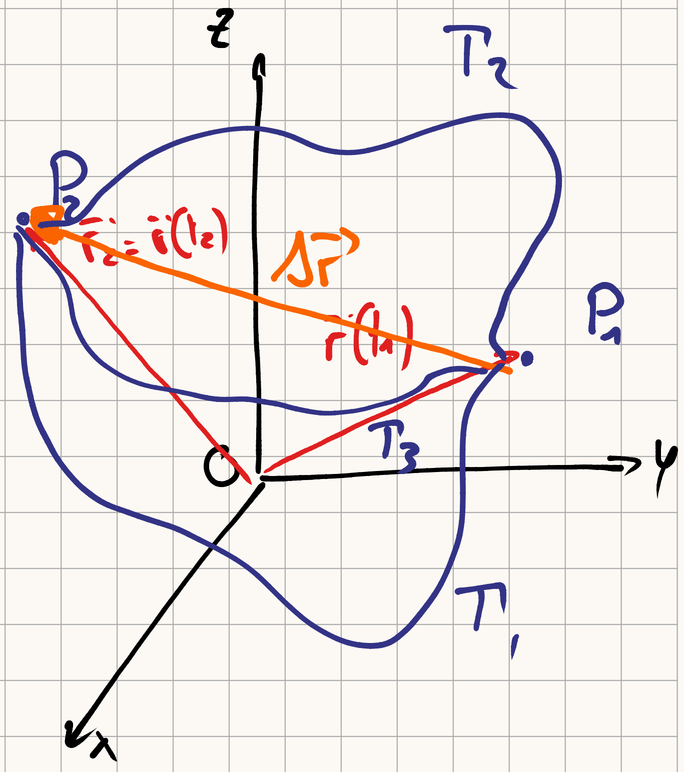
Cette semaine, on verra ...

- → vitesse, accélération
- → différents systèmes de coordonnées
- → mouvement relatif.

Position (suite...)

Le déplacement d'un objet $\Delta\vec{r}$ représente sa variation de position en fonction du temps.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$



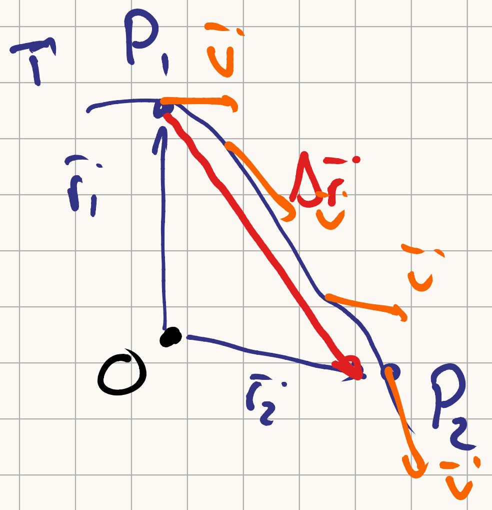
Si les deux temps considérés sont très proches, on utilise la notation infinitésimale

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t).$$

La trajectoire T est l'ensemble des points P atteints par un objet au cours du temps.

Vecteurs vitesse et accélération

Le vecteur vitesse représente une variation de position en fonction du temps.



On différencie :

* la vitesse moyenne : $\vec{v}_{moy} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

* la vitesse instantanée : $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

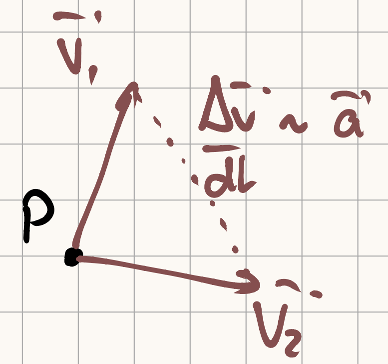
définition de la dérivée de la position en fonction du temps.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Remarques :

* Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est colinéaire au déplacement et tangent à la trajectoire.
* La vitesse scalaire est la norme du vecteur vitesse $v = \|\vec{v}\|$

De la même manière, le vecteur accélération est défini comme la dérivée de la vitesse en fonction du temps.

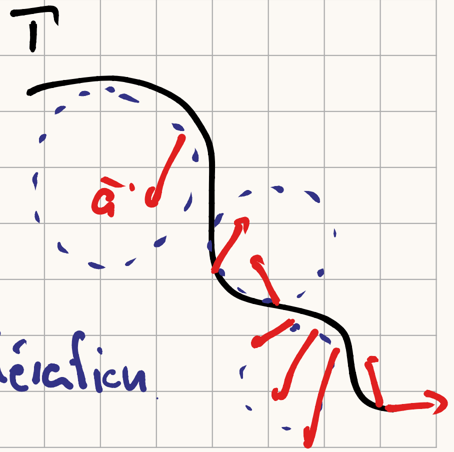


* accélération moyenne : $\vec{a}_{moy} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

* accélération instantanée : $\vec{a}(t) = \lim\limits_{dt \to 0} \dfrac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt}$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

$$= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$



Remarques : * Pour une trajectoire quelconque, le vecteur accélération est dirigé vers l'intérieur de la courbe

* L'accélération scalaire est la norme du vecteur accélération.

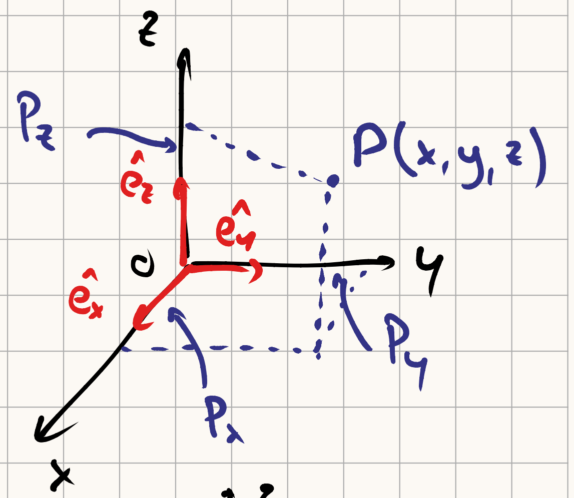
Systèmes de coordonnées

Pour décrire le mouvement d'un objet, on utilise un système de coordonnées auquel on associe un repère orthonormé direct.

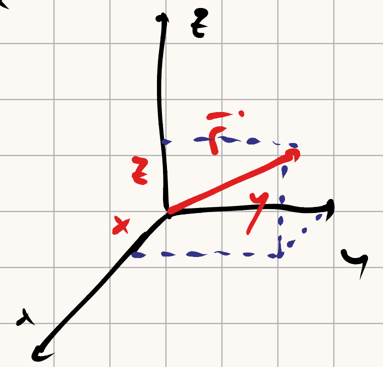
Il existe plusieurs systèmes de coordonnées, plus ou moins adaptés au mouvement étudié.

1. Coordonnées cartésiennes

Un point dans l'espace est décrit par trois longueurs (x, y, z), reliées au repère orthonormé direct $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$.



La direction du repère ne change pas en fonction du temps.



Ainsi :

* position : $\vec{r} = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z$

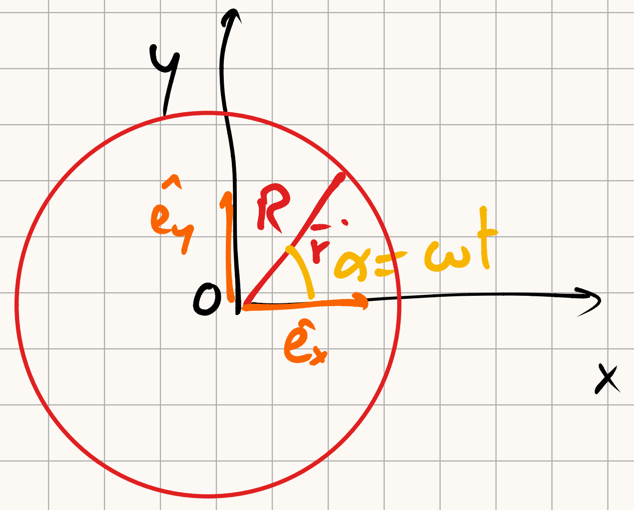
* vitesse : $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(x \cdot \hat{e}_x + y \cdot \hat{e}_y + z \cdot \hat{e}_z\right)$

$$= \frac{d}{dt}(x \cdot \hat{e}_x) + \frac{d}{dt}(y \cdot \hat{e}_y) + \frac{d}{dt}(z \cdot \hat{e}_z) = \left(\frac{d}{dt}x\right)\hat{e}_x + \left(\frac{d}{dt}y\right)\hat{e}_y + \left(\frac{d}{dt}z\right)\hat{e}_z$$

$$= \dot{x}\,\hat{e}_x + \dot{y}\,\hat{e}_y + \dot{z}\,\hat{e}_z.$$

* accélération : $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\hat{e}_x + \ddot{y}\,\hat{e}_y + \ddot{z}\,\hat{e}_z$

Exemple: mouvement circulaire uniforme : R cste, ω cste,



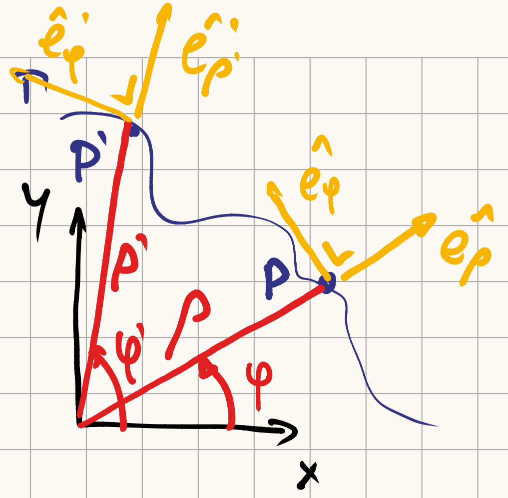
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\alpha \\ R \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \omega R(-\sin\omega t) \\ \omega R(\cos\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R\sin\omega t \\ \omega R\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega R\omega\cos\omega t \\ \omega R\omega(-\sin\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 R\cos\omega t \\ -\omega^2 R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour aller plus loin : et si $R \neq$ cste, mais $R = R(t)$?

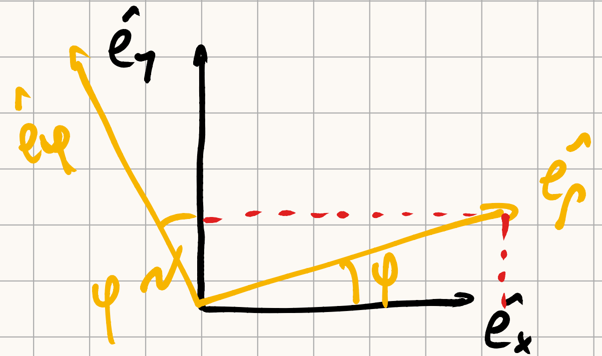
2. Coordonnées polaires



La position d'un point est donnée par sa distance ρ à une référence (origine), et par un angle φ (en 2D).

On associe un repère mobile $(P, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi)$

$$\frac{\Delta \hat{e}_\rho}{\Delta t} \neq 0 \rightarrow \dot{\hat{e}}_\rho \neq 0$$



Exprimons $\dot{\hat{e}}_\rho$ et $\dot{\hat{e}}_\varphi$:

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \cos\varphi \cdot \hat{e}_x + \sin\varphi\, \hat{e}_y \\ \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{e}_x + \cos\varphi\, \hat{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_\rho = \dot\varphi(-\sin\varphi)\hat{e}_x + \dot\varphi\cos\varphi\, \hat{e}_y = -\dot\varphi\sin\varphi\,\hat{e}_x + \dot\varphi\cos\varphi\,\hat{e}_y = \dot\varphi\big(\overbrace{-\sin\varphi\,\hat{e}_x + \cos\varphi\,\hat{e}_y}^{\hat{e}_\varphi}\big) \\ \dot{\hat{e}}_\varphi = \dot\varphi(-\cos\varphi)\hat{e}_x + \dot\varphi(-\sin\varphi)\,\hat{e}_y = -\dot\varphi\big(\underbrace{\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\varphi\,\hat{e}_y}_{\hat{e}_\rho}\big) \end{cases}$$

Ainsi : $\begin{cases} \dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi \\ \dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,e_\rho \end{cases}$

La position est décrite par : $\bar{r} = \rho \cdot \hat{e}_\rho$

La vitesse : $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d}{dt}(\rho \cdot \hat{e}_\rho) = \frac{d}{dt}\rho \cdot \hat{e}_\rho + \rho \cdot \frac{d}{dt}\hat{e}_\rho$

$$= \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

L'accélération : $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi) = \ddot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\hat{e}}_\rho + \ddot{\varphi}\rho\,\hat{e}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{\rho}\,\hat{e}_\varphi + \dot{\varphi}\rho\,\dot{\hat{e}}_\varphi$

$$= \ddot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \ddot{\varphi}\rho\,\hat{e}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{\rho}\,\hat{e}_\varphi + \dot{\varphi}\rho(-\dot{\varphi}\,\hat{e}_\rho)$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi$$