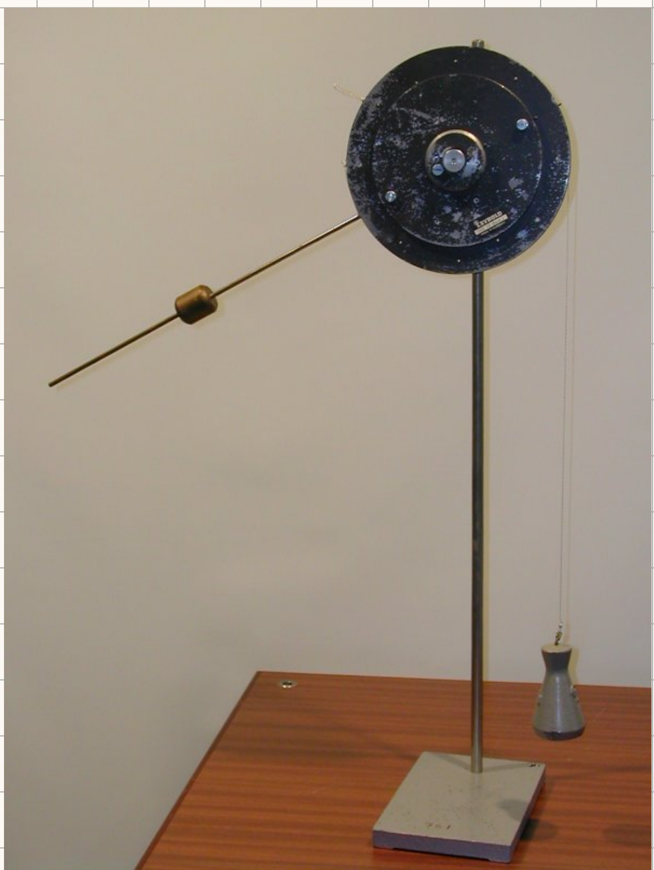
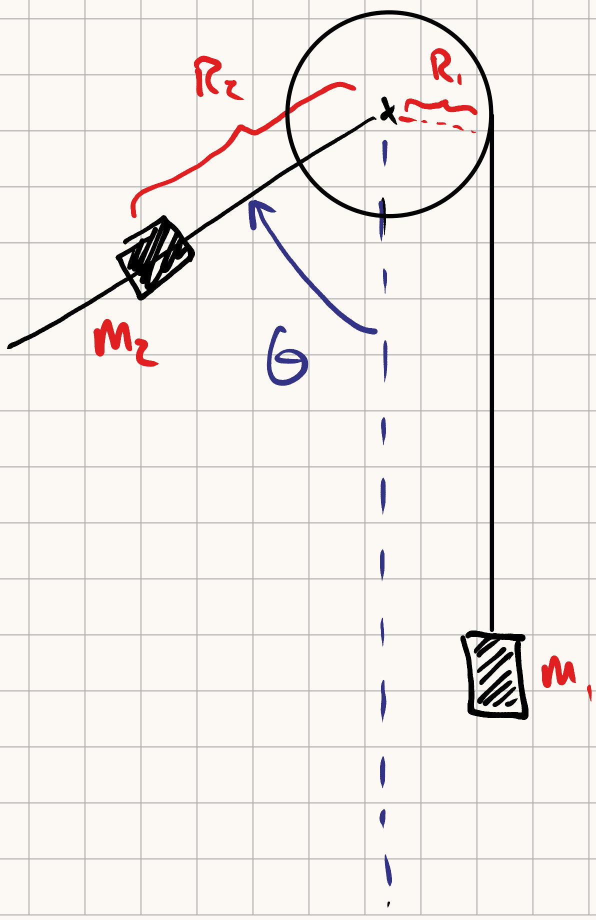
Expérience : pendule instable

On considère le système ci-dessous, formé d'une masse m_2 située sur une barre rigide à une longueur R_2 du centre de la poulie.
De l'autre côté, une masse m_1 est suspendue à la poulie de rayon R_1.

On a vu expérimentalement que ce système possédait deux positions d'équilibre. Etudions ces positions mathématiquement.





Pour obtenir les positions d'équilibre, on commence par calculer l'énergie potentielle du système :

$$E_{pot}^{tot} = E_{pot}^{1} + E_{pot}^{2}$$
$$= -m_1\, g \cdot \theta R_1 - m_2\, g \cdot R_2 \cos\theta ,$$

où $\theta . R_1$ est la longueur déroulée de fil lorsqu'on tourne la poulie d'un angle θ, et où on a fixé le zéro du potentiel au centre de la poulie.

Ainsi, $\dfrac{dE_p}{d\theta} = -m_1 g R_1 + m_2 g R_2 \sin\theta$

A l'équilibre, $\dfrac{dE_p}{d\theta}(\theta_{eq}) = 0 \Rightarrow \sin\theta_{eq} = \dfrac{m_1 R_1}{m_2 R_2}$

Par les propriétés du sinus, on a deux positions d'équilibre :
$$\begin{cases} \theta_1 = \sin^{-1}\left(\dfrac{m_1 R_1}{m_2 R_2}\right) \\ \theta_2 = \pi - \sin^{-1}\left(\dfrac{m_1 R_1}{m_2 R_2}\right) \end{cases}$$

On observe que ces solutions n'existent que si

$$0 < \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} \leq 1 .$$

Pour étudier la stabilité de ces positions, on calcule la dérivée seconde de l'énergie potentiel qu'on évalue en θ_1 et θ_2.

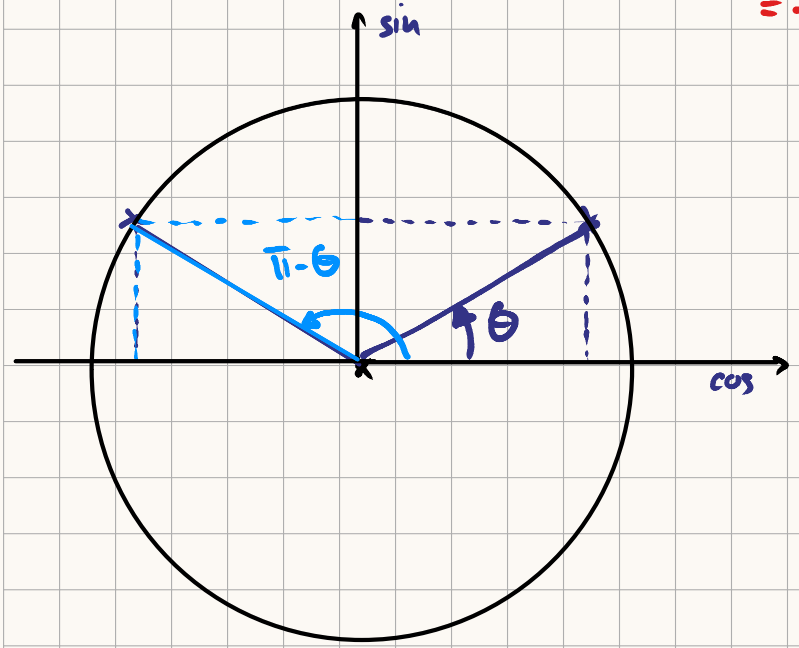
$$\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} = m_2 g \cdot R_2 \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 : \quad \frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_1) = m_2 g \cdot R_2 \cdot \overbrace{\cos\theta_1}^{>0} > 0 \rightarrow \text{stable}$$

$$\theta_2 : \quad \frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_2) = m_2 g R_2 \cos(\pi - \theta_1)$$

$$= -m_2 g R_2 \cos(\theta_1) < 0$$

$\Rightarrow$ instable.



La solution θ_1 correspond à un équilibre stable, alors que $\theta_2 = \pi - \theta_1$ correspond à un équilibre instable.