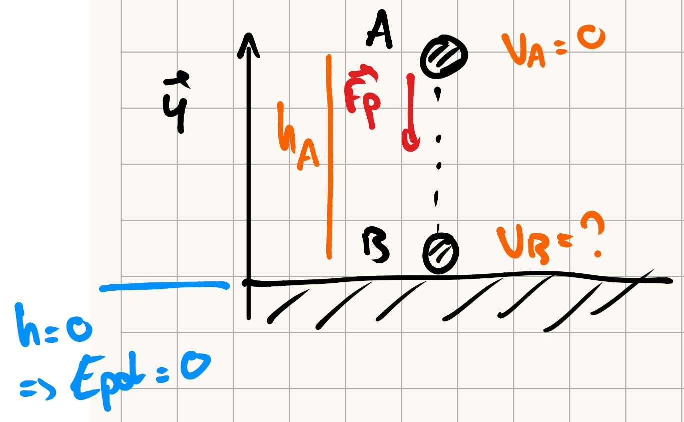
Exemple 1 : chute libre (revisitée)



On utilise des considérations énergétiques:

$$W_{AB}^{\vec{F}} = \Delta E_{cin} = \quad ① \quad W_{AB}^{\vec{F_P}} = E_{pot,A} - E_{pot,B}$$

$$= mg \cdot h_A$$

$$② \quad \Delta E_{cin} = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$① = ② \Rightarrow mgh_A = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow \boxed{v_B^2 = 2 g h_A}$$

Si on rajoute des frottements ? $\vec{F_f} = -f \cdot \hat{e}_\tau$

$$W_{AB}^{tot} = \underbrace{W_{AB}^{\vec{F_P}}}_{E_{pot,A} - E_{pot,B}} + W_{AB}^{\vec{F_f}}$$

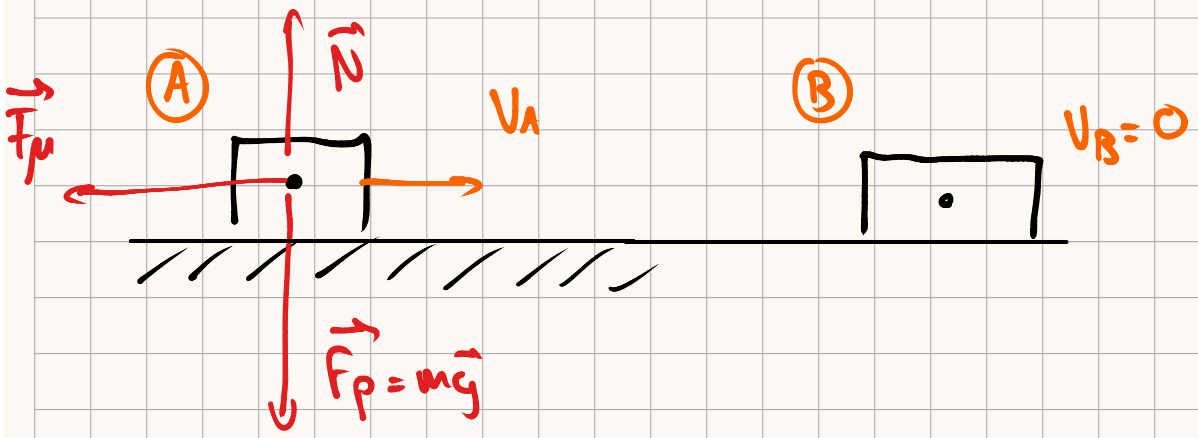
On calcule $W_{AB}^{\vec{F_f}} = \int \vec{F_f} \cdot d\vec{r} = -\int f \cdot dy$

$$= -f h_A$$

$$\Rightarrow W_{AB}^{tot} = mgh_A - f \cdot h_A = h_A (mg - f)$$

$$① = ② \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m v_B^2 = h_A (mg - f)}$$

Exemple 2 : distance de freinage



Que vaut d_f la distance de freinage ?

$W_{AB}^{\vec{F}} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$= \int F_T \, ds$

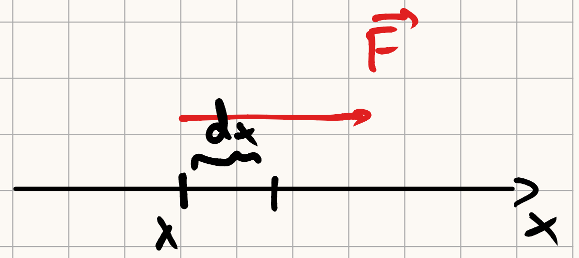
Thm de l'Ecin, $\Delta W_{AB}^{tot} = \Delta E_{cin}$.

* $W_{AB}^{tot} = \underbrace{W_{AB}^{\vec{N}}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \vec{N} \perp d\vec{r}}} + \underbrace{W_{AB}^{\vec{F_p}}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \vec{F_p} \perp d\vec{r}}} + W_{AB}^{\vec{F_\mu}} = \int_A^B \vec{F_\mu} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\mu \cdot N \cdot ds = -\mu \cdot N \cdot d_f = -\mu m g \, d_f$

* $\Delta E_{cin} = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = -\frac{1}{2} m V_A^2$

$\Rightarrow \quad -\mu \cdot mg \cdot d_f = -\frac{1}{2} m V_A^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_f = \frac{V_A^2}{2 \mu g}}$

Forces et Epot



On considère le cas 1D, et une force conservative.

* $\delta W^{\vec F} = \vec F \cdot d\vec r = F \cdot \hat e_x \cdot dx \cdot \hat e_x = F \cdot dx$
* $\delta W^{\vec F} = Epot_1 - Epot_2 = Epot(x) - Epot(x+dx)$

$$\Rightarrow F \cdot dx = Epot(x) - Epot(x+dx) = -\left[Epot(x+dx) - Epot(x)\right]$$

$$\Rightarrow F \overset{cons}{=} - \frac{Epot(x+dx) - Epot(x)}{dx} = - \frac{dEpot}{dx}$$

On dit que la force dérive d'un potentiel.

En 3D, on écrit $\vec F = \left(-\frac{\partial Epot}{\partial x}, -\frac{\partial Epot}{\partial y}, -\frac{\partial Epot}{\partial z}\right) = -\vec{grad}\, Epot = -\vec\nabla Epot$

où $\frac{\partial}{\partial x}$ est l'opérateur dérivée partielle selon x.

Remarques: On a les équivalences suivantes

① $\exists$ une fonction $E_{pot}(x)$ telle que $W_{AB}^{F} = E_{pot}(x_A) - E_{pot}(x_B)$

② $\exists$ une fonction $E_{pot}(x)$ telle que $\vec{F} = -\nabla E_{pot}$ $\left(= -\frac{d}{dx} E_{pot} \text{ en 1D} \right)$

③ Le travail W_{AB}^{F} ne dépend pas de la trajectoire

④ Le travail sur un chemin fermé $\oint_T \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est nul

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial_x \\ \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_z \end{pmatrix}$$

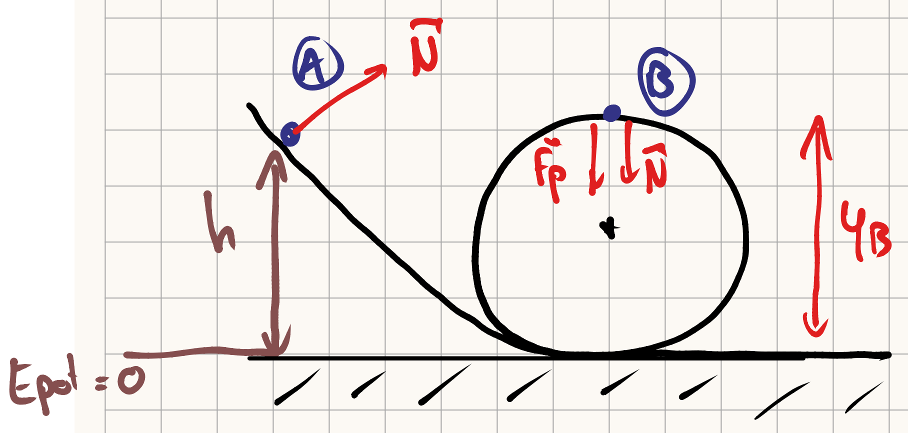
⑤ $\vec{rot}\, \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

⑥ La force $\vec{F}$ est conservative.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial_x \\ \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{matrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \\ \partial F_x \end{matrix}$$

$\Rightarrow E_{méc} = E_{pot} + E_{cin} = \text{constante}$

Expérience bille sur glissière



$$\vec{F_p} + \vec{N} = m\frac{v^2}{R} \qquad N=0 \Rightarrow V_B = \sqrt{gR}$$

A quelle hauteur doit-on lacher la bille pour qu'elle fasse un tour complet ?

Forces : $\rightarrow \vec{N} \perp d\vec{r} \Rightarrow$ ne travaille pas

$\rightarrow \vec{F_p}$ tq $F_{p,\tau} \neq 0 \Rightarrow$ L'énergie mécanique du système est conservée

En A : $E_{mec_A} = E_{cin_A} + E_{pot_A} = 0 + mgH$

En B : $E_{mec_B} = E_{cin_B} + E_{pot_B} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\,y_B = \frac{1}{2}mgR + mg\,2R = \frac{5}{2}mgR$

$$\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow mgH = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow \boxed{H = \frac{5}{2}R}$$

Equilibre et énergie potentielle

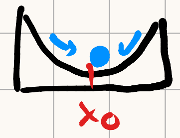
En mécanique Newtonienne, l'équilibre est déterminé par la condition $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}^{tot} = \vec{0}$.

Si les forces sont conservatives, $\vec{F}(x_0) = -\frac{dE_{pot}}{dx}(x_0)$. On peut écrire

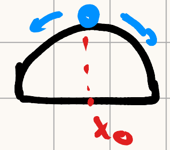
$$\boxed{\frac{dE_{pot}}{dx}(x_0) = 0}$$

Les positions d'équilibre correspondent aux extrema de l'énergie potentielle.

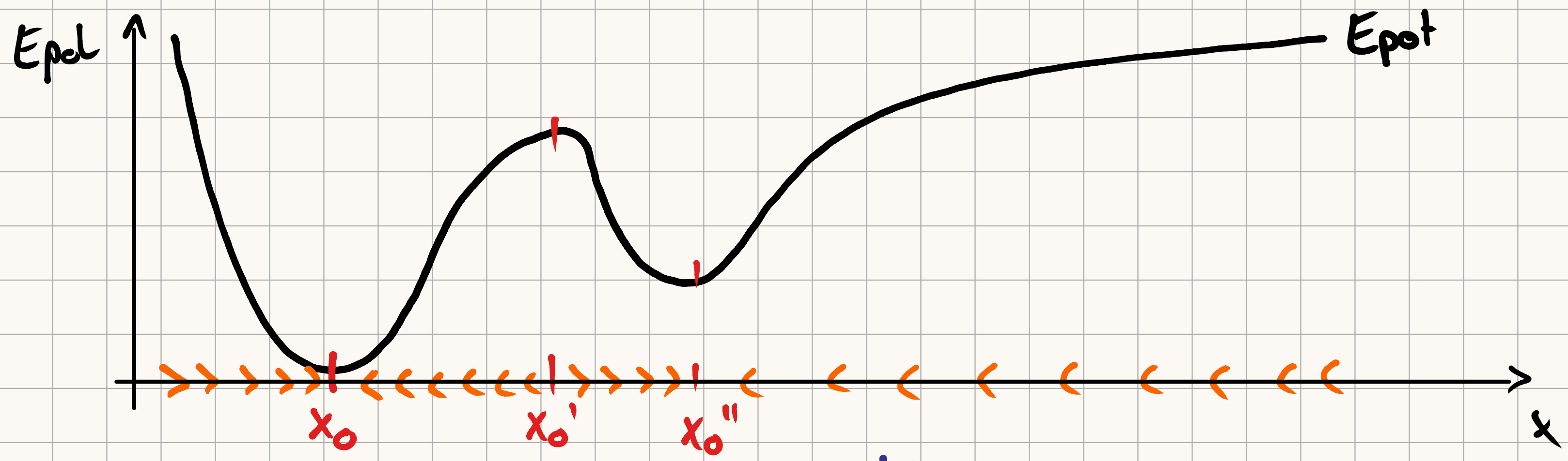
Il y a deux sortes d'équilibre : ① stable



② instable



Comment déterminer si x_0 est stable ou instable ?



x_0 tels que $\frac{dE_{pot}}{dx}(x_0) = 0$.

La force vaut $-\frac{dE_{pot}}{dx}(x)$. Si

↗ $\frac{dE_{pot}}{dx}(x') > 0 \Rightarrow F < 0 \Rightarrow F$ va "vers la gauche"

↘ $\frac{dE_{pot}}{dx}(x') < 0 \Rightarrow F > 0 \Rightarrow F$ va "vers la droite"

Ainsi : $\begin{cases} \text{un minimum de } E_{pot} \text{ correspond à un équilibre stable} \\ \text{un maximum de } E_{pot} \text{ correspond à un équilibre instable} \end{cases}$

Mathématiquement, on peut calculer le développement limité (au 2e ordre) de Epot autour de x_0.

$$E_{pot}(x) \overset{x\approx x_0}{=} E_{pot}(x_0) + \cancelto{=0}{\frac{dE_p}{dx}}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_{pot}}{dx^2}(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$= E_{pot}(x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2E_{pot}}{dx^2}(x_0)}_{\substack{>0\ ? \\ <0\ ?}}\underbrace{(x-x_0)^2}_{>0}$$

+ Si $\frac{d^2E_{pot}}{dx^2}(x_0) < 0 \Rightarrow E_{pot}(x) < E_{pot}(x_0)$

$\Rightarrow$ équilibre instable

+ Si $\frac{d^2E_{pot}}{dx^2}(x_0) > 0 \Rightarrow E_{pot}(x) > E_{pot}(x_0)$

$\Rightarrow$ équilibre stable.