Cours 7

29.10.25

La semaine passée, on a vu...

→ les forces de friction

→ les poulies

→ les forces de rappel

Cette semaine on verra...

→ le travail d'une force

→ l'énergie cinétique et le thm associé

→ l'énergie potentielle

→ l'énergie mécanique et sa conservation

→ la notion d'équilibre

3. Energie

Pour résoudre un problème de dynamique, on a posé $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ pour obtenir les équations du mouvement.

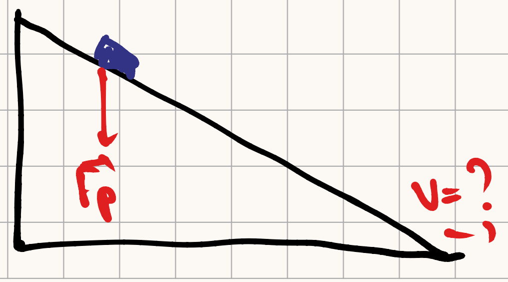
Cette approche est complète, mais...

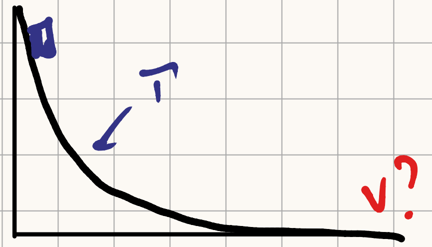
→ implique de connaître $\vec{F}(t)$ ou $\vec{F}(\vec{r}(t))$

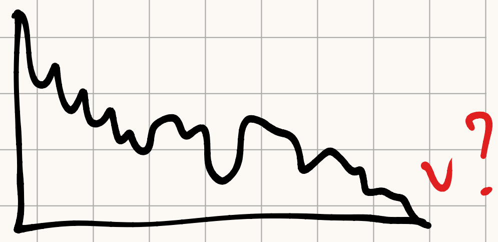
→ longue, propice aux erreurs de calculs

→ il se peut qu'on ne s'intéresse qu'à un point particulier du mouvement.

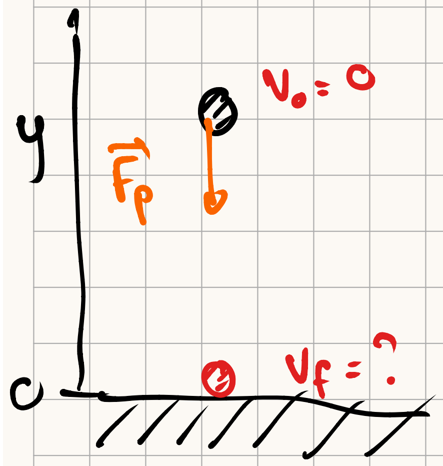
Exemple : luge







Exemple : chute libre, vitesse d'impact :



Newton : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \ddot{y} = -g$

$\Rightarrow \dot{y} = -g \cdot t$

$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$

A l'impact, $y(t_f) = 0 \Rightarrow y(t_f) = -\frac{1}{2} g t_f^2 + h_0 = 0$

$\Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

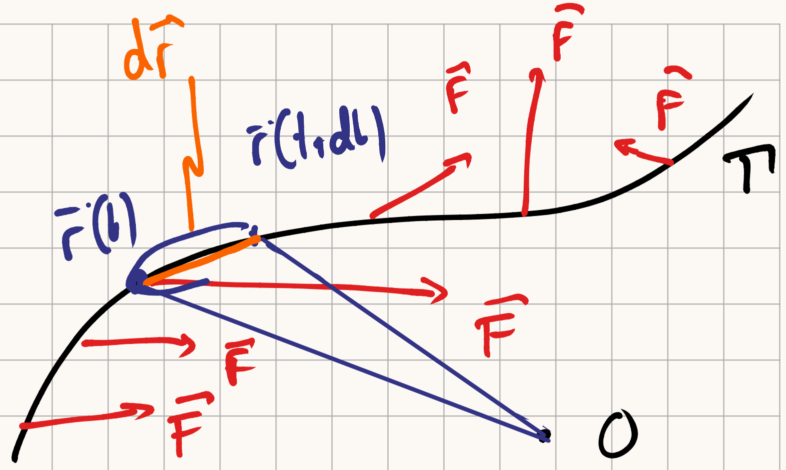
La vitesse vaut $\dot{y}(t_f) = -g \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = v_f \Rightarrow \boxed{v_f^2 = 2 \cdot g \cdot h_0}$

Question : ① Peut-on faire plus court ?

② Peut-on relier des variations de vitesse aux forces appliquées sur l'objet pendant une certaine distance ?

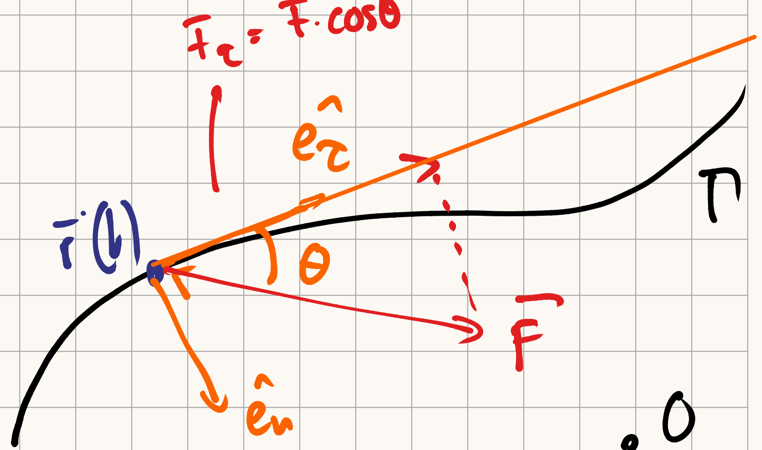
Travail d'une force

Le travail d'une force mesure la contribution de la force au déplacement de l'objet.



Pour un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$, on introduit le travail infinitésimal δW comme:

$$\begin{aligned}\delta W^{\vec{F}} &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \vec{F} \cdot ds \cdot \hat{e}_\tau \\ &= F \cdot \cos\theta \cdot ds \\ &= F_\tau \cdot ds\end{aligned}$$



Remarques:

* seule la composante de la force // au déplacement contribue au travail ("travaille")

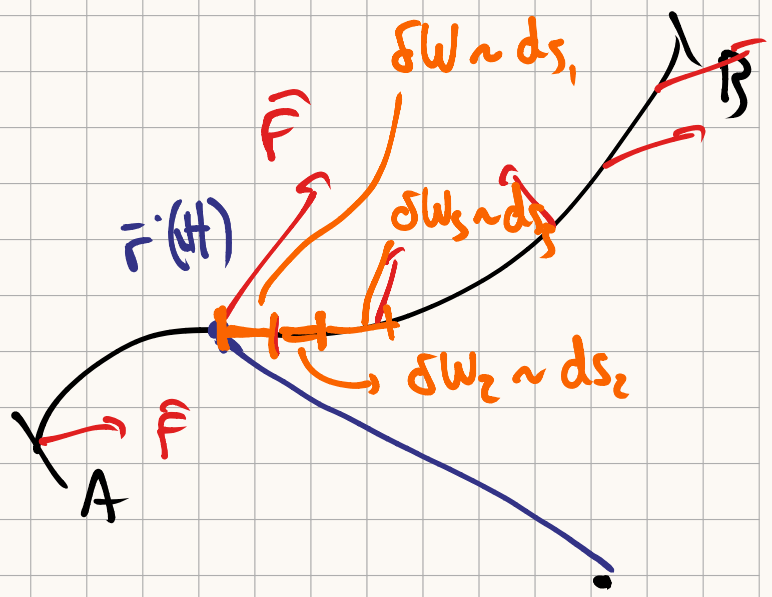
* si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta > 0 \Rightarrow \delta W^F > 0$

* si $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta < 0 \Rightarrow \delta W^F < 0$

* le travail dépend généralement de la trajectoire suivie.

* l'unité du travail est le Joule : ($1\ J = 1\ N \cdot m = 1\ kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$)

Le travail <u>total</u> d'une force sur un objet pour un déplacement de A à B vaut :



$$W_{AB}^{\vec{F}} = \delta W_1^{\vec{F}} + \delta W_2^{\vec{F}} + \delta W_3^{\vec{F}} + \dots$$

$$= \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \dots$$

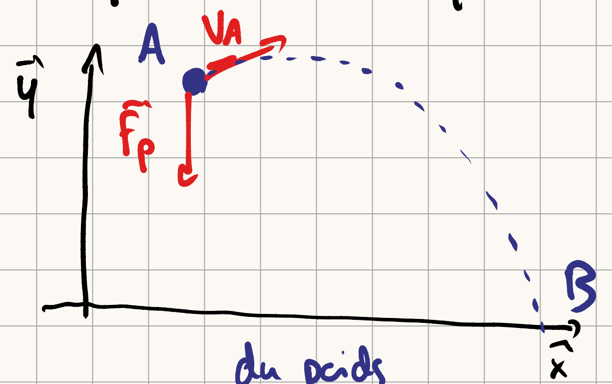
dr petit
⇒ # éléments grands
⇒ limite continue

$$= \sum_i \vec{F} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_\tau \cdot ds = \int_\Gamma F_\tau \cdot ds .$$

Si on a plusieurs forces : $W_{AB}^{\Sigma \vec{F}} = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i W_{AB}^{\vec{F}_i}$

Exemple: tir balistique



$$W_{AB}^{\vec{F}_p} = \int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{r} = m\vec{g}\cdot\int_A^B d\vec{r} = m\vec{g}\cdot\vec{AB}$$

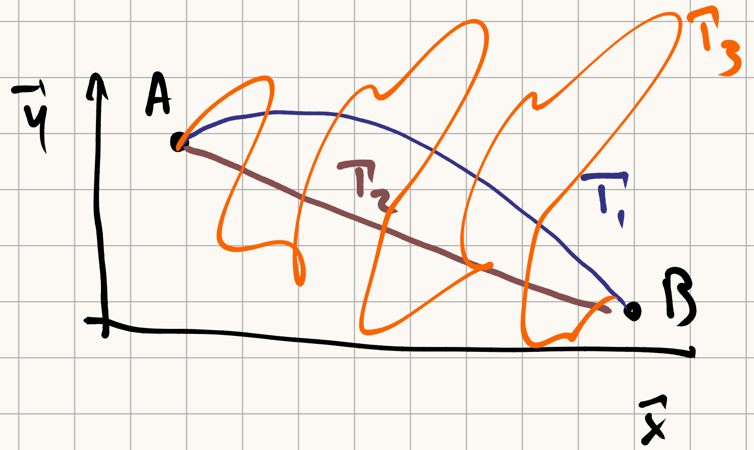
$$= m\vec{g}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$= m\begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} = -mg(y_B - y_A)$$

$$= mg(y_A - y_B) > 0.$$

Le travail du poids ne dépend que de la hauteur initiale et finale.

Exemple : trajectoire avec frottements constants, $\vec{F}_f = -f\cdot\hat{e}_t$



$$W_{AB}^{\vec{F}_f} = \int_A^B \vec{F}_f\cdot d\vec{r} = -\int_A^B f\cdot\hat{e}_t\cdot \overbrace{ds\cdot\hat{e}_t}^{d\vec{r}} = -\int_A^B f\cdot ds = -f\int_A^B ds$$

$$= -f\cdot P_T < 0$$

Le travail des frottements dépend de la trajectoire

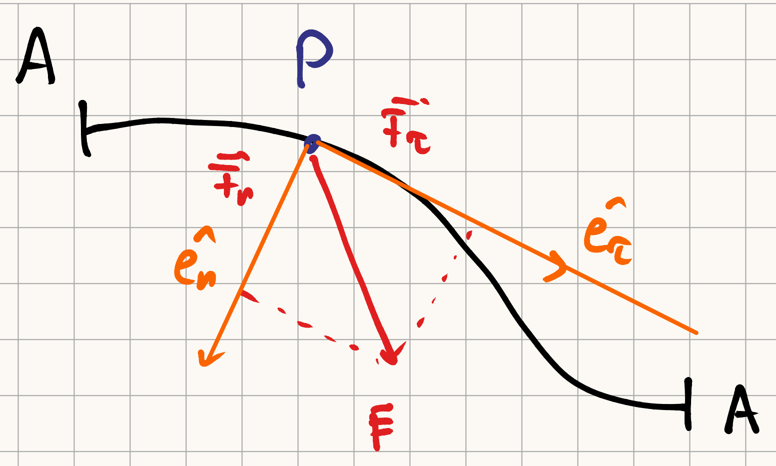
Puissance

La notion de puissance permet de décrire la vitesse à laquelle le travail a été effectué

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Elle s'exprime en Watt (1 W = 1 J/s)

Energie cinétique



On a vu que $W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_\tau \cdot ds$

Or, $\sum \vec{F} = m\vec{a} = \underbrace{m \cdot \frac{dv}{dt}}_{F_\tau} \hat{e}_\tau + m \frac{v^2}{\rho} \hat{e}_n$

Donc : $W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = \int_A^B m \cdot dv \cdot \overbrace{\frac{ds}{dt}}^{v} = \int_A^B m \cdot v \cdot dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$

On définit l'énergie cinétique $E_{cin} = T = K = \frac{1}{2} m v^2$

Le <u>théorème de l'énergie cinétique</u> affirme la variation d'énergie cinétique d'un système est <u>entièrement</u> dû au travail des forces extérieures sur ce système

$$W_{AB}^{F^{ext}} = E_{cin,B} - E_{cin,A}$$

Remarques : * ce résultat ne dépend pas des forces considérées

* „ „ „ pas de la trajectoire, seulement des positions initiales et finales.

Energie potentielle

Une force conservative est telle que le travail qu'elle effectue le long d'un déplacement ne dépend pas de la trajectoire suivie (pesanteur).

On peut écrire :

$$W_{AB}^{\vec{F}_c} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = E_{pot,A} - E_{pot,B}$$

où $V(\vec{r})$ est une fonction de la position appelée l'énergie potentielle E_{pot}.

L'énergie potentielle est définie à une constante près qu'on fixe en fonction du système

Dans le cas contraire, on parle de force non-conservative ou dissipative.
Aucune énergie potentielle n'y est associée.

Remarque : Contrairement à Ecin, l'énergie potentielle dépend de la force :

- Pesanteur : $\vec{F}_p = m \cdot \vec{g}$, $E_{pot}(h) = mgh + C$
- Rappel : $\vec{F}_k = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)$, $E_{pot}(\vec{x}) = \frac{1}{2} k (\vec{x} - \vec{x}_0)^2$

Energie mécanique

Si toutes les forces sont conservatives :

$$E_{cin,B} - E_{cin,A} \overset{\text{thm } E_{cin}}{=} W_{AB}^{\vec{F}^{ext}} \overset{\text{thm } E_{pot}}{=} E_{pot,A} - E_{pot,B}$$

$$\Rightarrow \quad E_{pot,A} + E_{cin,A} = E_{pot,B} + E_{cin,B} \qquad \forall A, B.$$

On définit l'énergie mécanique du système comme la somme de E_{pot} et E_{cin}.

Elle est conservée si toutes les forces sont conservatives.

Dans le cas contraire, $E_{mec,B} - E_{mec,A} = W_{AB}^{F_{diss}} = \int_A^B \vec{F}_{diss} \cdot d\vec{r}$.