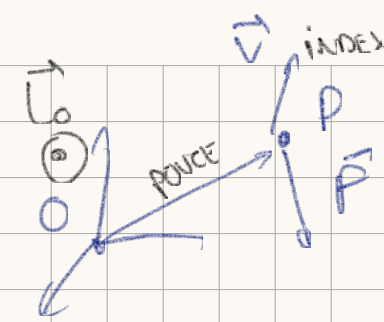


# Cours 12



03.12.25

La semaine passée, on a vu...

→ le moment de force pour un point matériel  $\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{OP} \wedge \vec{F}$

→ le moment cinétique pour un PM  $\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge \vec{p}$

→ le thm du moment cinétique  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$ ,  $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$

→ la force de gravitation  $\vec{F}_G = -G \frac{mM}{r^2} \hat{e}_r$

→ la notion de "potentiel effectif"  $E(r, \theta, t)$   
 $\vec{L} = \text{const} \rightarrow E(r, t)$

$$E = E_{\text{cin}} + \underbrace{V(r)}_{V_{\text{eff}}}$$

Cette semaine, on verra...

→ le solide indéformable

→ la description de sa rotation

→ le moment d'inertie par rapport à un axe  $I_s$ .



## 6. Solide indéformable

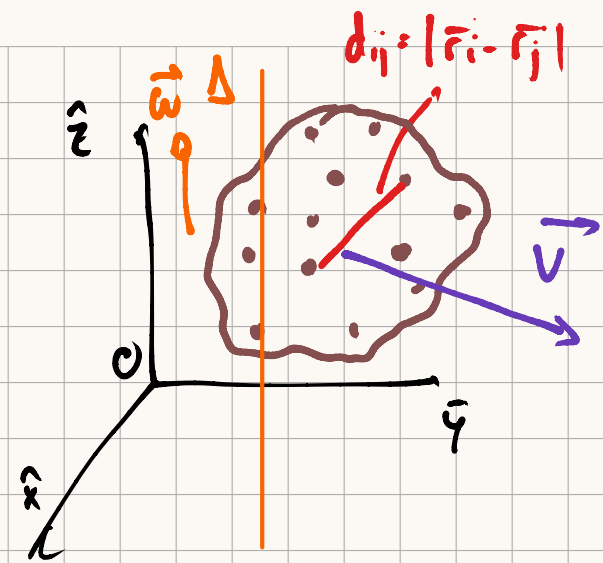
On étudie notre étude à des objets formés d'une infinité de PM, dont les distances relatives  $d_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$  ne changent pas au cours du temps.

On parle de solide indéformable.

Pour une description complète, il faut trouver

- ① le mot de translation du COM
- ② le mot. de rotation du solide autour de son axe de rotation.

Il est important de remarquer que tous les points du solide ont la même vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ .



## Centre de masse

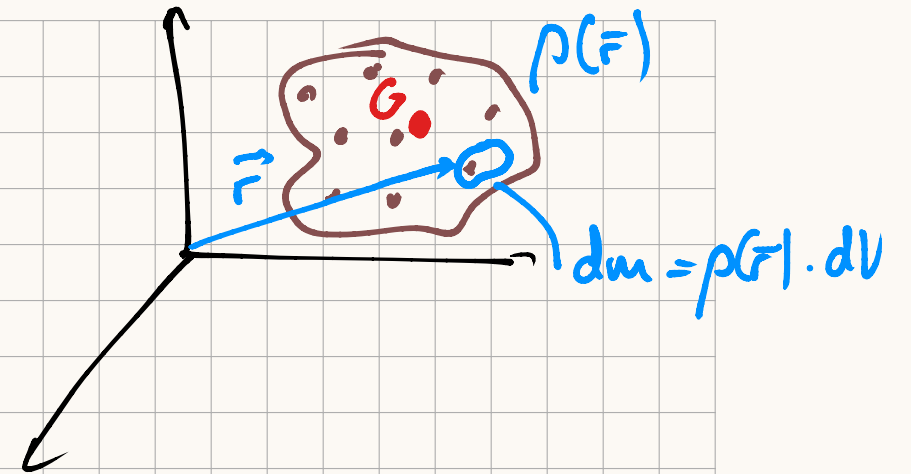
Dans le cas d'un système de plusieurs PM, la position du CDM est donnée par

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Dans le cas d'un solide, on a une infinité de PM.


$$\begin{aligned} \vec{r}_G &= \frac{1}{M} \int \vec{r} \cdot dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) dV \\ &= \int_x \int_y \int_z \vec{r}(x,y,z) \rho(x,y,z) dx dy dz \end{aligned}$$

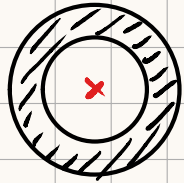
On peut étendre la ZLN au solide en considérant que toutes les forces s'appliquent au CDM.  $\sum \vec{F}^{ext} = m \vec{a}_G$ .



# Exemple: composition d'objets

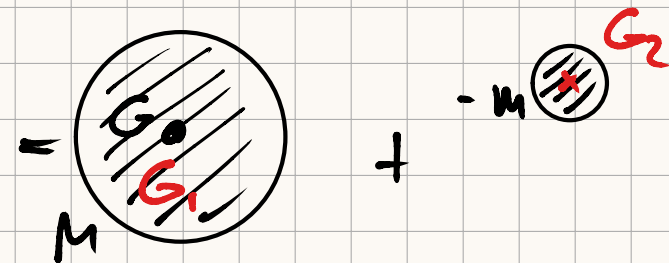
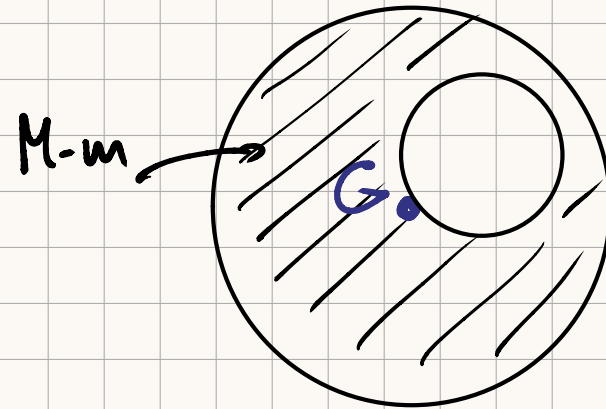
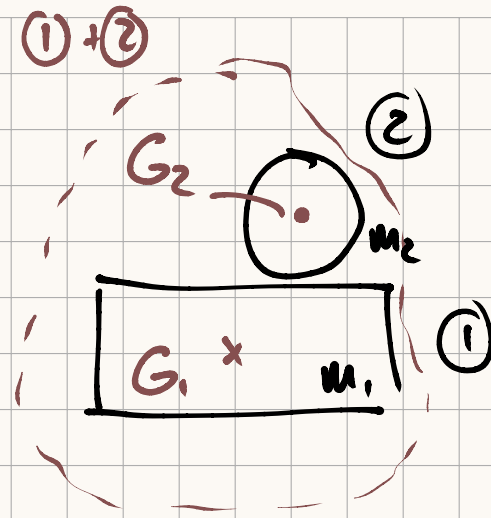
On peut traiter ces objets comme des PM

①   $\Rightarrow \vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2}{m_1 + m_2}$

②  Le CDM peut ne pas appartenir à l'objet

③ Si on a un objet "à trou", on peut le décomposer en un objet "plein" et un objet de masse négative

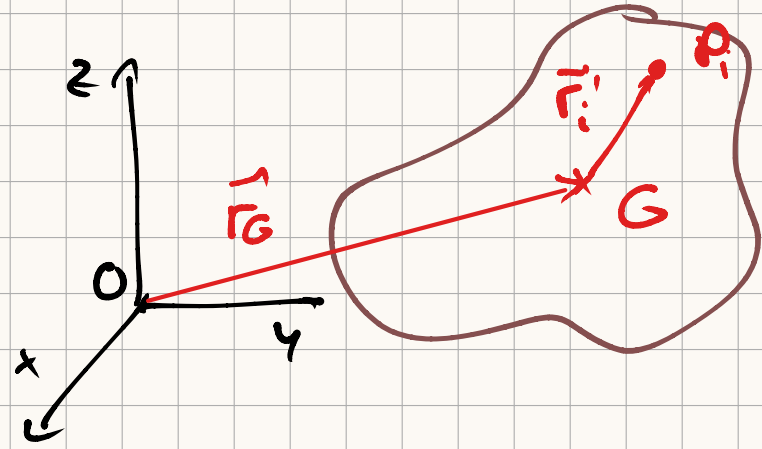
$$\vec{OG} = \frac{M \cdot \vec{OG}_1 - m \vec{OG}_2}{M - m}$$



## Description du mov. de rotation

Un point du solide est décrit par 6 coordonnées.

On peut étendre le thm. du moment cinétique au solide indéformable.



$$\vec{L}_O^i = m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \sum_i^{\text{ensemble PM}} m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$$

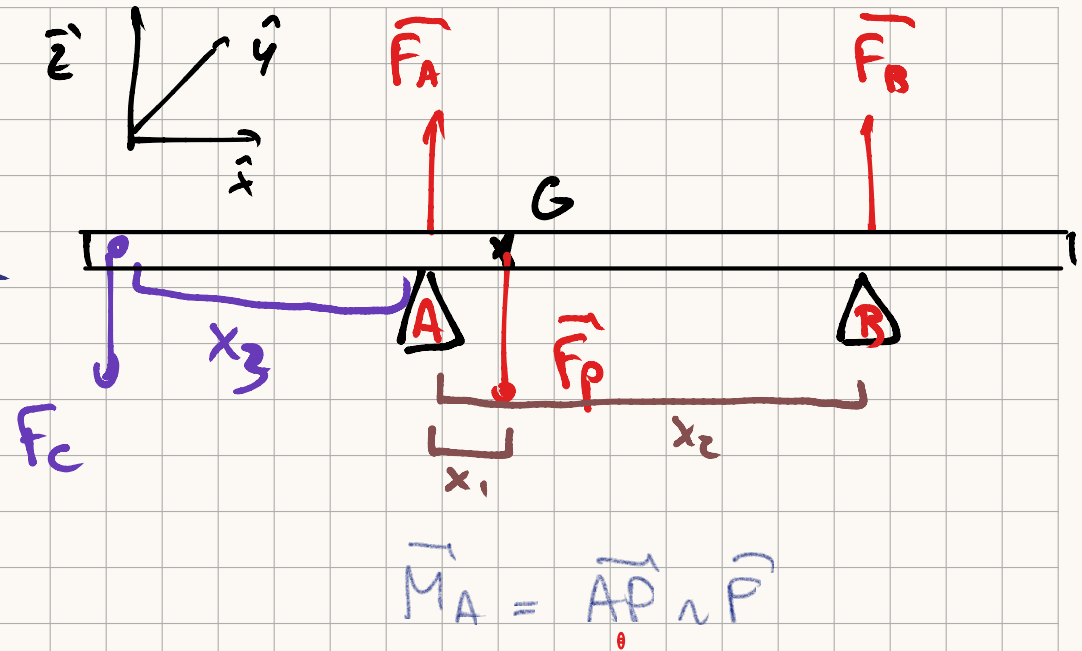
$$\text{solide indéf.} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \int_V \vec{r} \wedge \rho(\vec{r}) \cdot dV \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

De plus, on peut prouver que le thm du moment cinétique s'applique tel quel au solide indéformable:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

Exemple: poutre statique

Que vaut  $F_A$  et  $F_B$  ? si équilibre



\* Neutra:  $F_A + F_B - mg = 0$

\* Rotatia:  $\vec{L}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{M}_i$

$$\vec{M}_A = \vec{AA} \wedge \vec{F}_A + \vec{AG} \wedge \vec{F}_P + \vec{AB} \wedge \vec{F}_B$$

$$= 0 + x_1 \cdot mg (\hat{e}_y) + x_2 \cdot F_B (-\hat{e}_y)$$

$$= x_1 mg - x_2 F_B$$

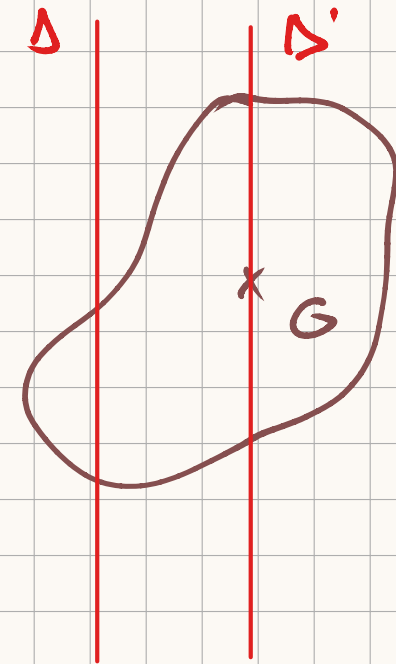
$$= 0$$

$$\Rightarrow F_B = mg \cdot \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow F_A = mg - F_B = mg - mg \frac{x_1}{x_2}$$

Que se passe-t-il si on ajoute  $F_C$  en  $x_3$  ?  $= mg \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) > 0$

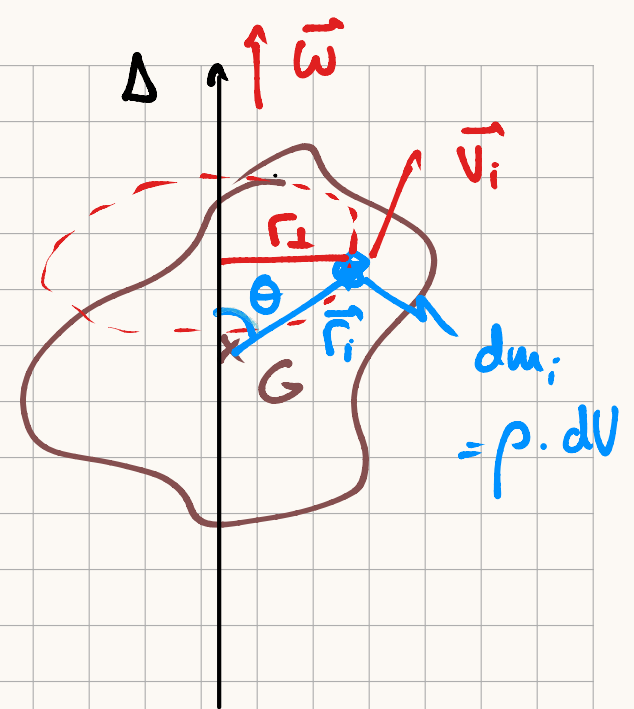
Remarque: En général, on considère une rotation autour d'un axe  $\Delta$  quelconque.

Pour l'étude de la dynamique, on va considérer le cas où l'axe  $\Delta'$  passe par le CDM du système.



## Considérations énergétiques

On considère un solide quelconque en rotation  $\vec{\omega}$  autour d'un axe  $\Delta$  qui passe par son CDM.



L'énergie cinétique "de rotation" vaut:

$$dE_{cin}^i = \frac{1}{2} dm v_i^2 = \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \cdot dV (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \cdot dV \|\omega r \sin\theta\|^2 = \frac{1}{2} \rho(r) dV \omega^2 \underbrace{(r \sin\theta)^2}_{r_{\perp}^2}$$

$$= \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \omega^2 r_{\perp}^2 dV$$

$$\text{Ainsi, } E_{cin} = \int_V dE_{cin}^i = \int_V \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \omega^2 r_{\perp}^2 dV = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2 dV$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 I_{\Delta}, \quad \text{où } I_{\Delta} \text{ est le moment d'inertie du solide par rapport à un axe } \Delta.$$

$$|\vec{\omega} \wedge \vec{r}| = \|\vec{\omega}\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \sin\theta$$

rotation propre au solide

## Moment d'inertie

On définit le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe comme

$$I_{\Delta} = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot r_{\perp}^2 dV$$

Remarques: \* Ça nous a étudié des rotations par rapport à un axe de référence.

\* Dans le cas d'un solide,  $I_{\Delta}$  joue le rôle de la masse pour les rotations.

Spinter : On verra demain qu'on peut écrire  $\vec{L}_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \vec{\omega}$

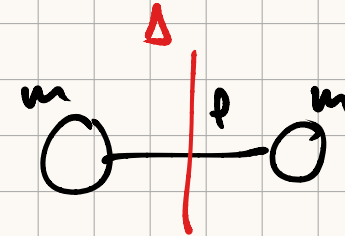
$$^{\text{''}} \vec{p} = m \cdot \vec{v} ^{\text{''}}$$

Exemples: différents objets

$$I_{\Delta} = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot r_i^2 dV$$

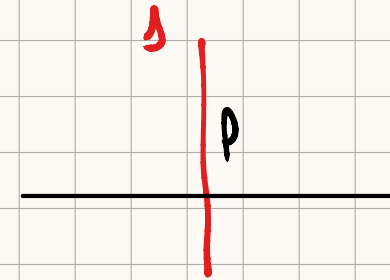
\* Halles

$$\Rightarrow I_{\Delta} = m \left(\frac{p}{2}\right)^2 + m \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m p^2$$



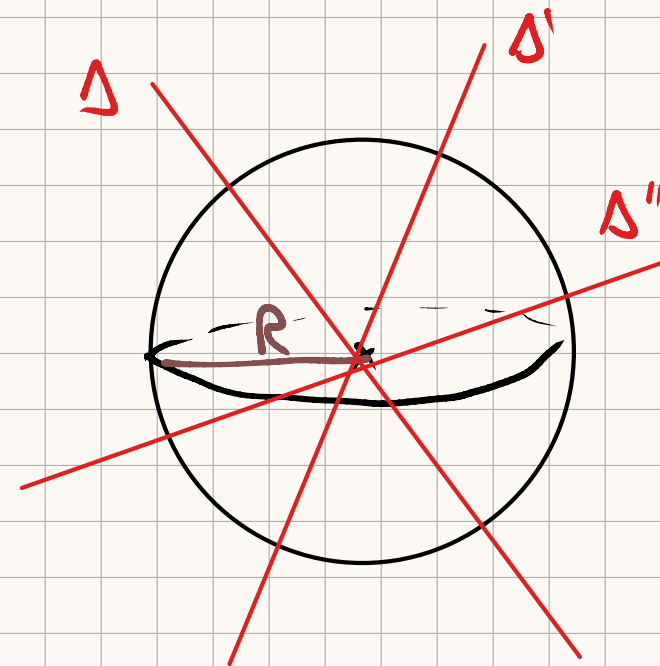
\* Tige

$$I_{\Delta} = \int_{-p/2}^{+p/2} \rho(x) \cdot x^2 dx = \frac{1}{12} m p^2$$

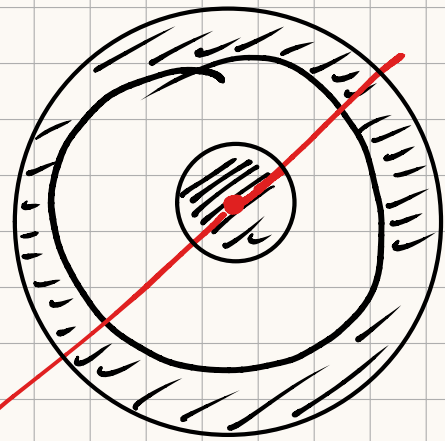
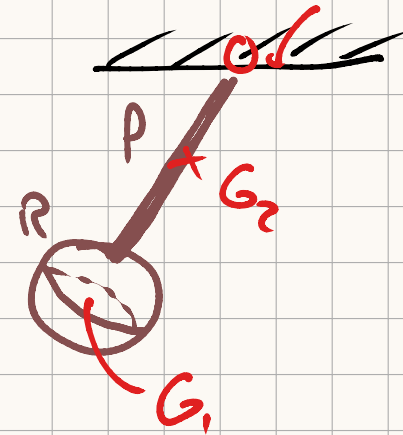


\* Sphère

$$I_{\Delta} = \frac{2}{5} M R^2$$



Remarque : Le moment d'inertie d'une composition d'objets vaut la somme des moments d'inertie de chaque composant.



$$I_{\Delta}^{tot} = I_{\Delta}^{boule} + I_{\Delta}^{anneau}$$

Que faire si on connaît  $I_{\Delta}$ , mais on s'intéresse à  $I_{\Delta'}$ , où  $\Delta // \Delta'$  ?

## Thm. de Steiner (-Huygens)

On peut déterminer le moment d'inertie  $I_{\Delta'}$  d'un solide par rapport à l'axe  $\Delta'$  à partir du moment d'inertie  $I_{\Delta}$  par rapport à un axe  $\Delta$ , à condition que les deux axes soient parallèles.

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + m \cdot d^2$$

