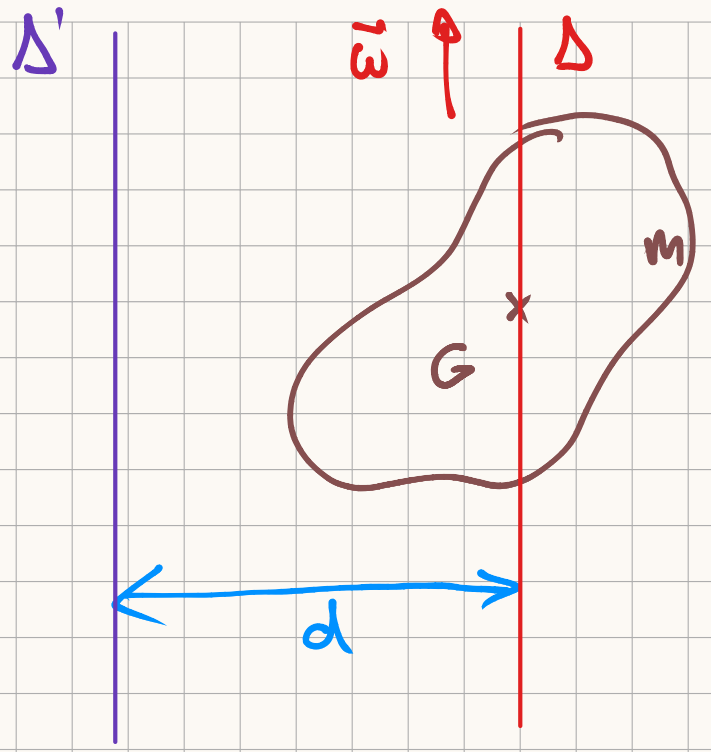
Thm. de Steiner (-Huygens)

On peut déterminer le moment d'inertie $I_{\Delta'}$ d'un solide par rapport à l'axe Δ' à partir du moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe Δ, à condition que les deux axes soient parallèles.



$$I_{\Delta'} = I_\Delta + m \cdot d^2$$

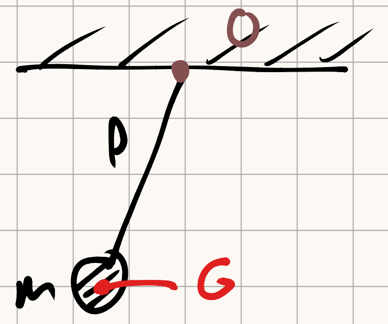
ERRATUM / COMPLEMENT

L'axe Δ doit passer par le CDM du système.

$$I_{\Delta'} = I_G + md^2$$

Exemple: pendules

① Pendule mathématique



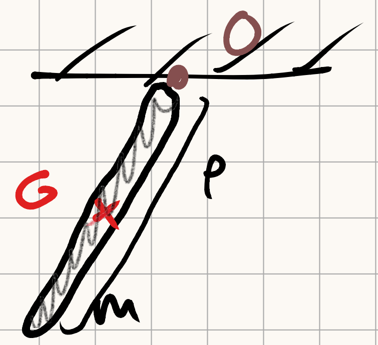
$$I_O = m\ell^2$$

② Pendule "boule"

$$I_O = ? \quad I_G = \int \rho(r)\, r_\perp^2 \, dV = \frac{2}{5} m R^2$$

$$I_O = I_G + m\ell^2$$ (thm de Steiner)

③ Pendule "physique"

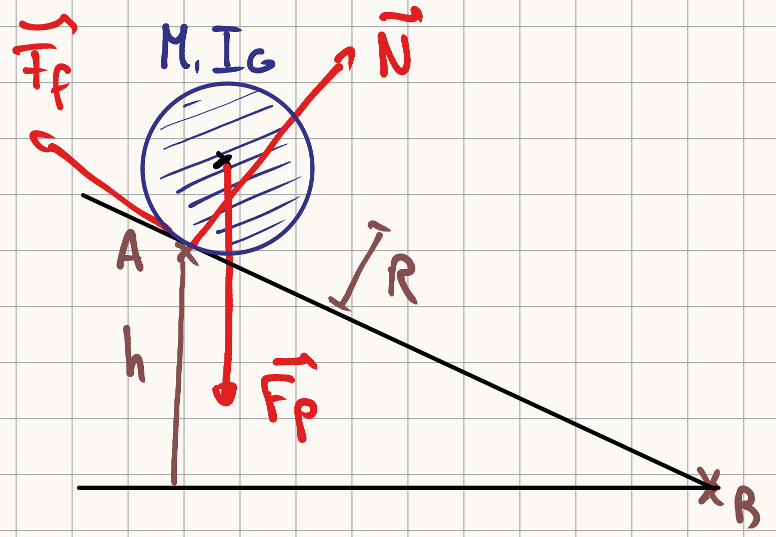


$$I_O = ? \quad I_G = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \rho \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{12} m\ell^2$$

$$I_O = I_G + m\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + \frac{1}{4} m\ell^2$$

$$= \frac{1}{3} m\ell^2$$

Exemple: cylindre qui roule



Un cylindre de masse M et de rayon R roule sans glisser sur un plan incliné.
Il est laché en A avec une vitesse nulle.
Quelle est sa vitesse en B ?

Pour un point matériel, on avait $V_B^{PM} = \sqrt{2gh}$. Quid des cylindres ?

Forces $\rightarrow$ $\vec{N} + \vec{F_p} + \vec{F_f}$

Roulement sans glissement $\Rightarrow$ $V_{contact} = 0$ $\Rightarrow$ $W^{\vec{F_f}} = 0$

La force de soutien ne travaille pas $W^{\vec{N}} = 0$

Ainsi, l'énergie mécanique du système est conservée.

L'énergie méc. vaut:

Ⓐ $E_{mec}^{A} = 0 + mgh$

Ⓑ $E_{mec}^{B} = E_{cin,tr} + E_{cin,rot} + E_{pot}$

$= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \cdot \omega^2 + 0$

① $v_G^B = v_B$

$= \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I_G \frac{v_B^2}{R^2}$

② roulement sans glissement

$v_B = \omega R$

$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I_G \frac{1}{R^2} v_B^2 = \frac{1}{2} v_B^2 \left(m + \frac{I_G}{R^2} \right)$

$\Rightarrow \boxed{v_B^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{I_G}{R^2}}}$

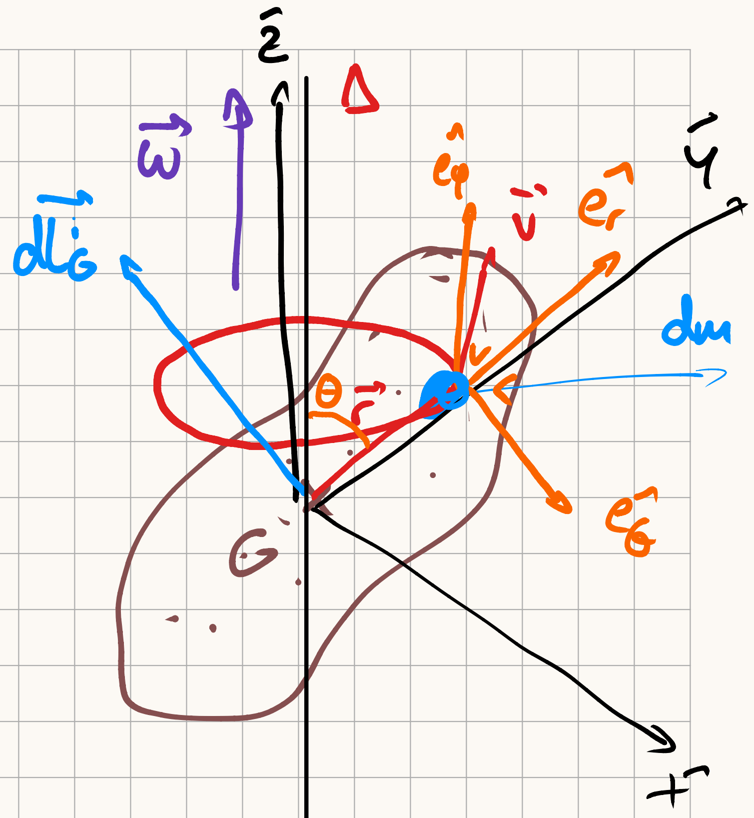
$I_G^{creux} = mR^2 \Rightarrow v_B^2 = gh$

$I_G^{plein} = \frac{1}{2} mR^2 \Rightarrow v_B^2 = \frac{4}{3} gh$

$\Rightarrow v^{plein} > v^{creux}$

Moment cinétique d'un solide

On considère un solide quelconque de masse $m = \int_V \rho(\vec{r})\, dV$, en rotation $\vec{\omega}$ autour de son COM.



Quel est son moment cinétique par rapport à G ?

$$\vec{dL_G^i} = \vec{r} \wedge \vec{dp} = \vec{r} \wedge dm.\vec{v}$$
$$= (r\, \hat{e_r}) \wedge dm\, (v\, \hat{e_\varphi})$$
$$= dm\, r\, \omega r \sin\theta\, (\hat{e_r} \wedge \hat{e_\varphi}) \quad (-\hat{e_\theta})$$
$$= -\omega r^2 \sin\theta\, dm.\, \hat{e_\theta}$$

$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge R$

$\|v\| = \|\omega\| \|R\| \sin\theta$

Le moment cinétique total $\vec{L_G} = \int_V \vec{dL_G^i} = \int_V -\omega r^2 \sin\theta\, \underbrace{\rho(r)\, dV}_{dm}\, \hat{e_\theta}$

Cette intégrale est dure à calculer.

Modèle 1 : haltère asymétrique

On simplifie notre solide. Le moment cinétique total vaut mtn

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^{①} + \vec{L}_G^{②}$$

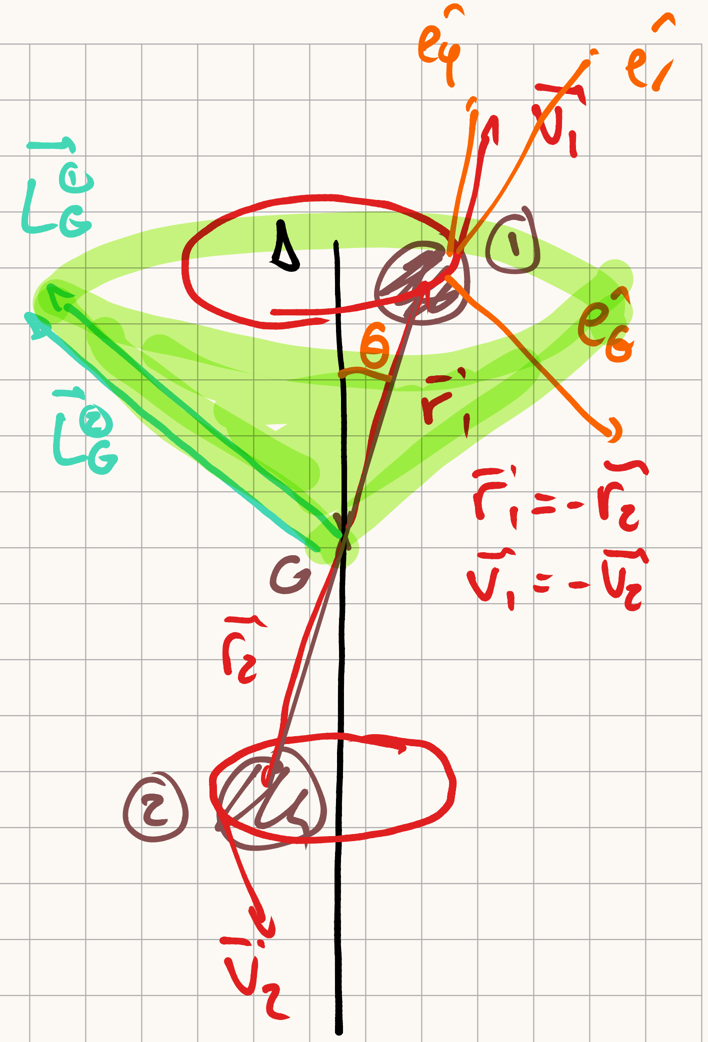
on reprend le résultat précédent

$$\vec{L}_G^{①} = m\,\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 = -m\omega r^2 \sin\theta\ \hat{e}_\theta$$

$$\vec{L}_G^{②} = m\,\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 = m(-\vec{r}_1)\wedge(-\vec{v}_1) = m\,\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1$$

$$= -m\omega r^2 \sin\theta\ \hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{L}_G^{tot} = -2m\omega r^2 \sin\theta\ \hat{e}_\theta = -M\omega r^2 \sin\theta\ \hat{e}_\theta$$



Le moment cinétique change de direction au cours du temps

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} \neq 0$$

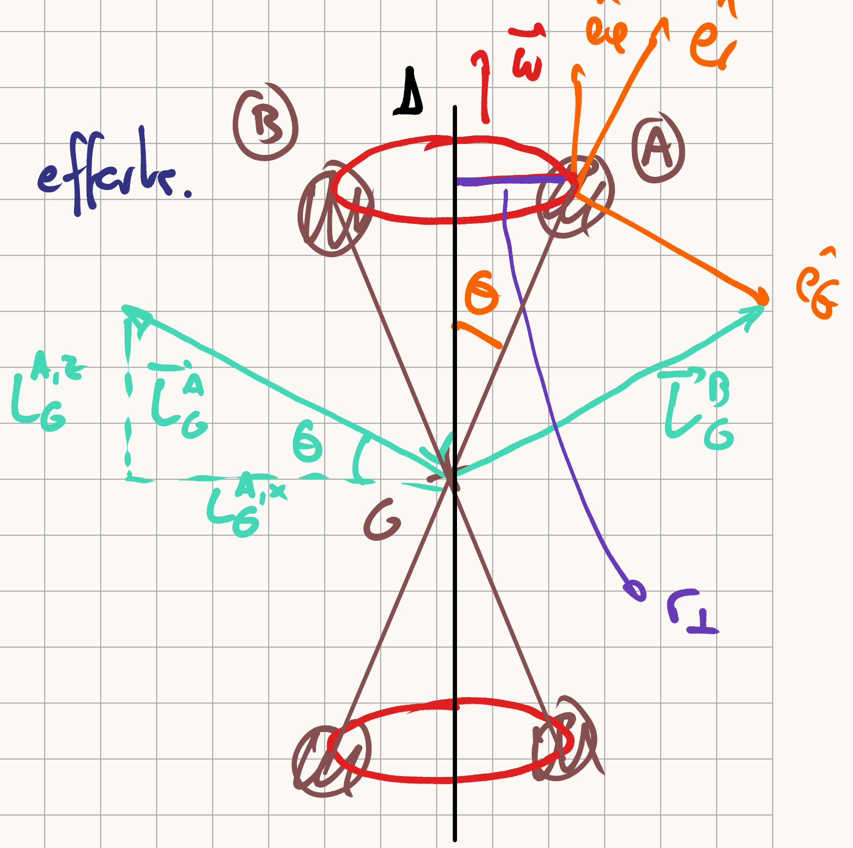
$$= \vec{M}_G^{ext}$$

Modèle 2 : haltère symétrique

$M' = M + M$

Du cas précédent, on remarque que le moment cinétique n'est pas toujours le long de l'axe de rotation.

Pour maintenir cette rotation, cela demande des efforts.



On rajoute un degré de symétrie à notre système

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^A + \vec{L}_G^B$$

On a : $L_G^{A,x} = -L_G^{B,x}$ par symétrie

et : $L_G^{A,z} = L_G^{B,z}$

Donc $$\vec{L}_G^{tot} = (\underbrace{L_G^{A,x} + L_G^{B,x}}_{=0})\hat{e}_x + (\underbrace{L_G^{A,y} + L_G^{B,y}}_{=0})\hat{e}_y + (L_G^{A,z} + L_G^{B,z})\hat{e}_z$$

$$= 2L_G^{A,z} \cdot \hat{e}_z = (2\omega M r^2 \sin\theta) \cdot \sin\theta\, \hat{e}_z = M' \cdot \omega (\underbrace{r \sin\theta}_{r_\perp})^2$$

$$= M' \cdot r_\perp^2 \cdot \vec{\omega}$$

moment d'inertie !!