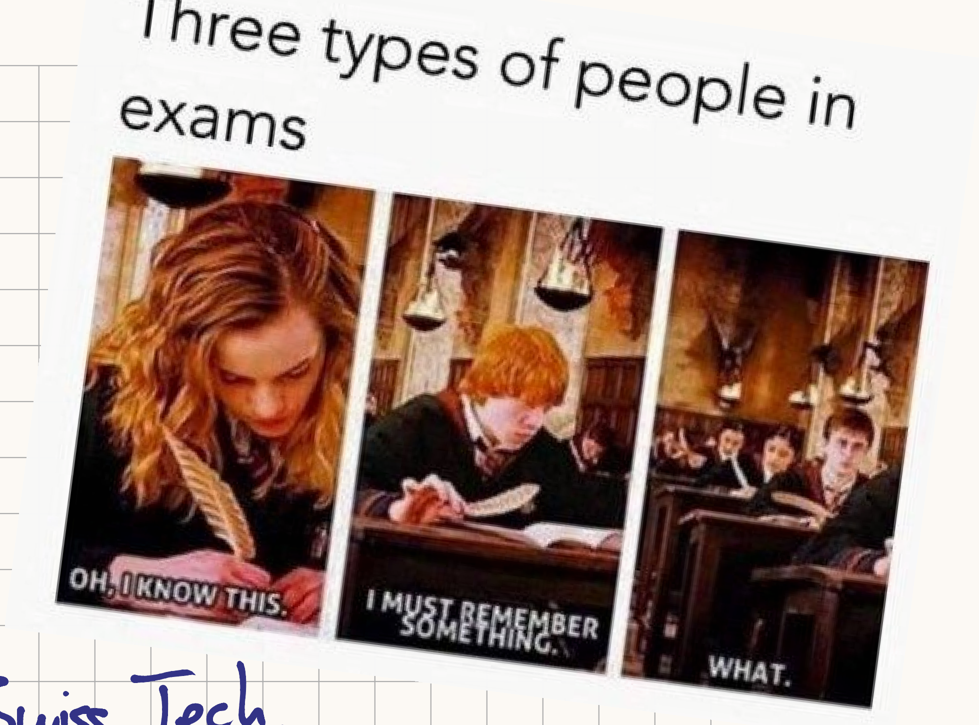
COURS 14
- REVISIONS -



INFORMATIONS EXAMEN

→ 16 janvier, 9h15 → 12h45 (3h30), Swiss Tech.

→ Formulaire A4 recto écrit à la main/tablette (imprimé)

→ Partie QCM "conceptuels" sans points négatifs (~20% de la note)

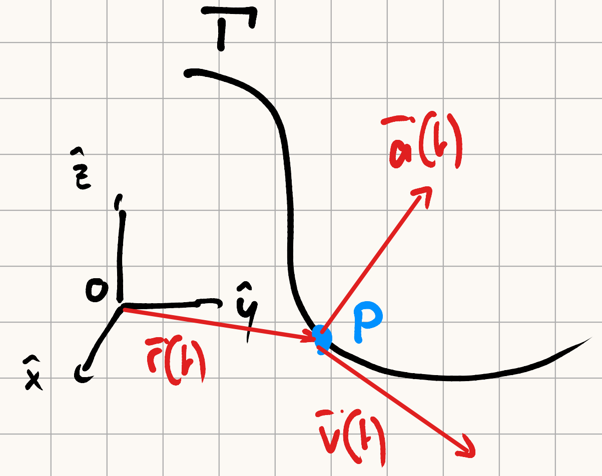
→ Partie ouverte similaire aux séries & anciens examens (~80%)

→ RAQ le 14 janvier ?? A CONFIRMER PAR EMAIL !

1. Cinématique

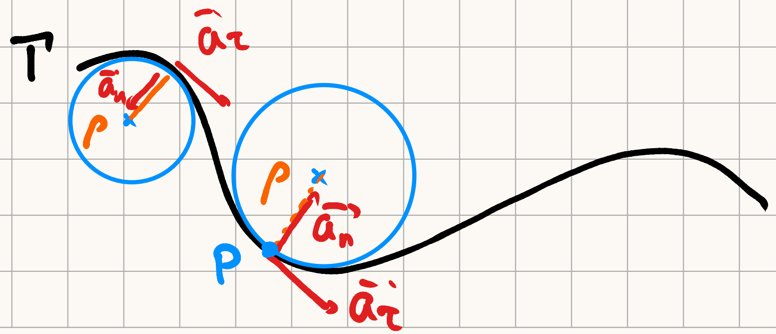
* Vecteurs position $\vec{r}(t)$, vitesse $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

  et accélération $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$



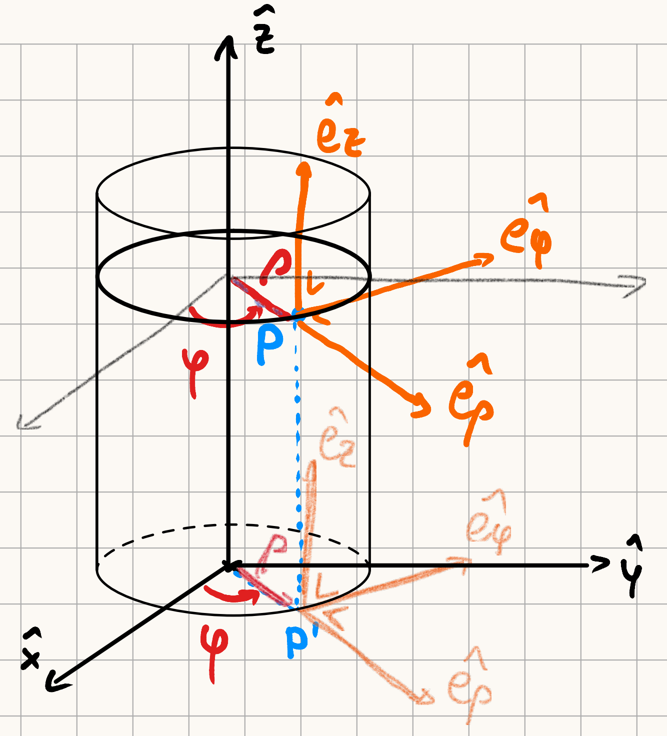
* Coordonnées cartésiennes $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$

* Coordonnées curvilignes $(P, \hat{e}_\tau, \hat{e}_n)$, $\vec{a} = (a_\tau, a_n) = \left(\dot{v}, \frac{v^2}{\rho}\right)$



* Coordonnées cylindriques $(P, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$

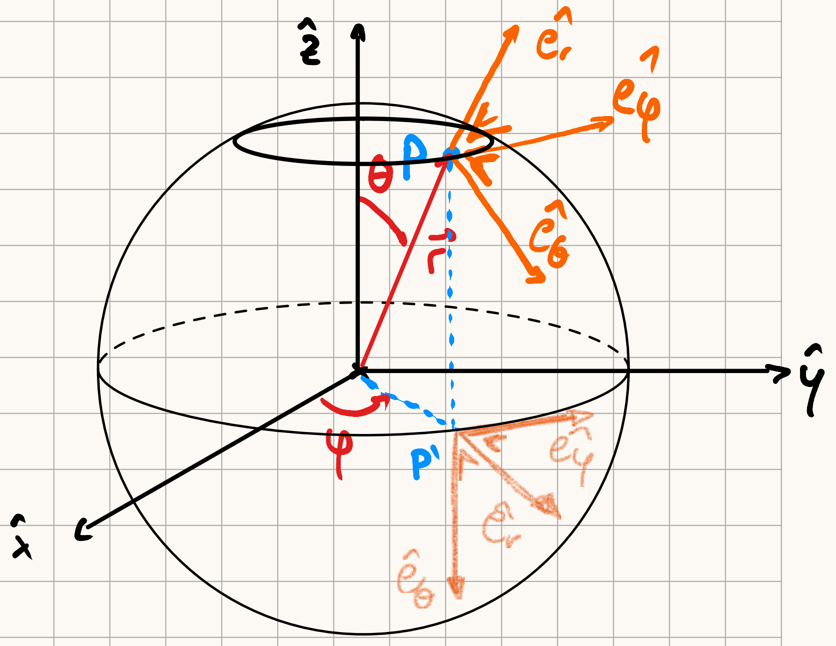
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$



* Coordonnées polaires $(z = cst = 0)$

* Coordonnées sphériques $(P, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\hat{e}_r$$
$$+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta)\,\hat{e}_\theta$$
$$+ (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta)\,\hat{e}_\varphi$$

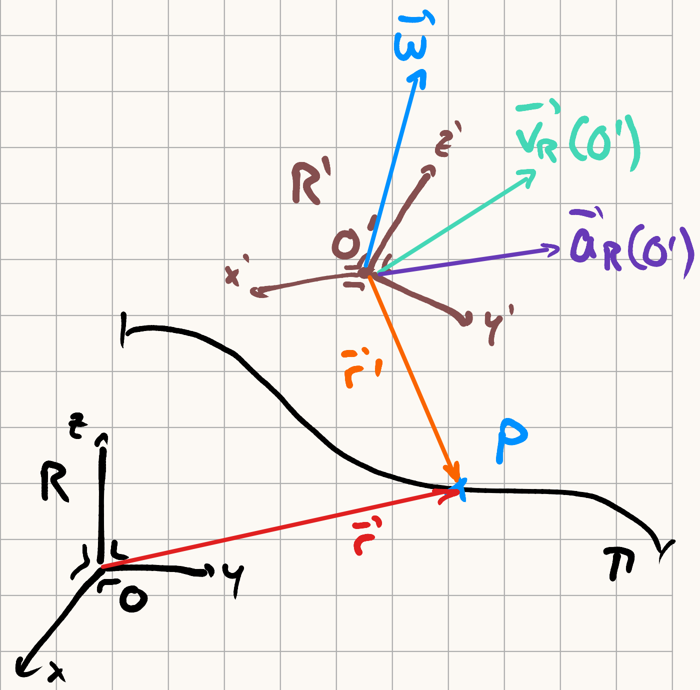


* Evolution d'un vecteur en rotation : $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$

* Mouvement circulaire ~~uniforme~~, de rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{e}_z$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \qquad \vec{a} = (a_t, a_n) = (\ddot{\theta} r, r\dot{\theta}^2)$$

si $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, $\underline{\underline{v = \omega r}}$



* Mouvement relatif : description du mouvement d'un PM selon un référentiel R' <u>en déplacement</u>.

$$\longrightarrow \vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(O') + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

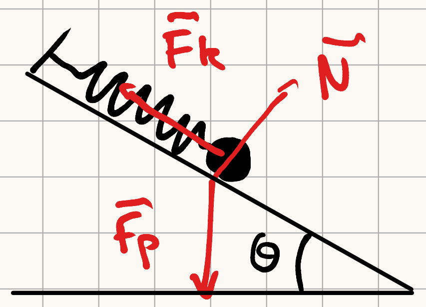
$$\longrightarrow \vec{a}_R(P) = \vec{a}_{R'}(P) + \vec{a}_R(O') + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

2. Dynamique

* Approximation du point matériel
  - → toute la masse est concentrée en un point
  - → pas de mvt. de rotation
  - → les forces s'appliquent au "CDM"

* Quantité de mouvement : $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

* 1e loi de Newton : repos $\Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$



* 2e loi de Newton : $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \overset{m\ cste}{=} m\vec{a}$

* 3e loi de Newton : $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$

Méthodologie

0) Imaginer ce qu'il va se passer

1) Faire un schéma

2) Identifier le système

3) Choisir un référentiel (d'inertie si possible)

4) Choisir le repère approprié (+ coordonnées)

5) Identifier les forces en jeu & projections dans le repère

6) Prendre en compte les contraintes & conditions initiales du système

7) Intégrer les équations du mouvement (2e loi de Newton)

* Force de réaction $\vec{N}$

   → $\perp$ à la surface, de la surface vers l'objet

   → décrochage $\Rightarrow$ $N=0$

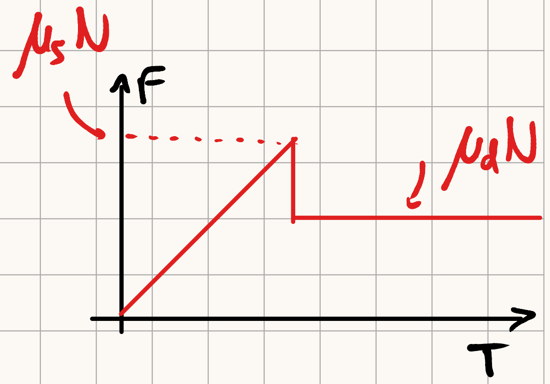
* Force de pesanteur (poids) $\vec{F_p} = m \cdot \vec{g}$

* Force de frottements secs, s'oppose au mouvement $\vec{F_\mu}$

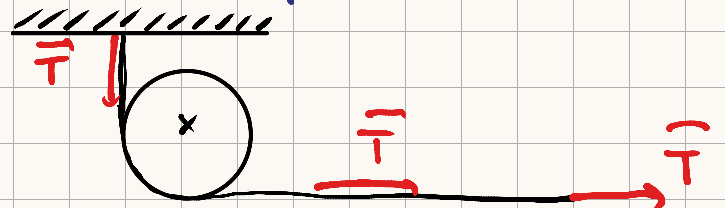
   → $V=0$ $(\sum \vec{F} = \vec{0})$ $\Rightarrow$ $\vec{F_\mu} < \vec{F}_{\mu,max} = -\mu_s N \cdot \hat{e_v}$

   → $V \neq 0$ $\Rightarrow$ $\vec{F_\mu} = -\mu_d \cdot N \cdot \hat{e_v}$

   → Roulement sans glissement : $V_{contact} = 0$ $\Rightarrow$ $V_G = \omega R$



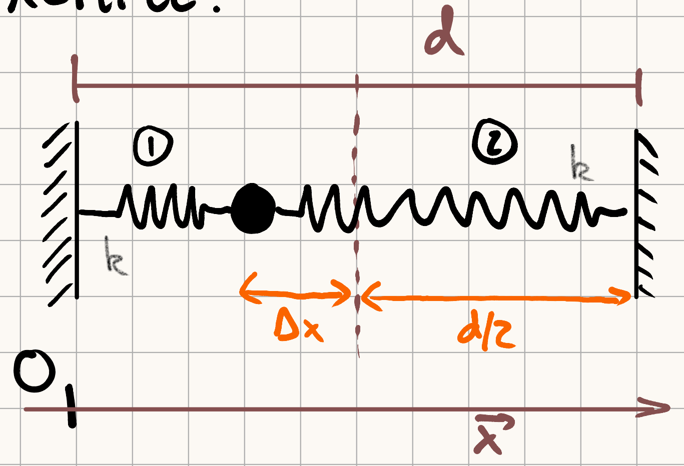
* Force de tension $\vec{T}$, poulie <u>sans masse</u> change la direction, pas la norme



- Force de rappel $\vec{F}_k = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)$, où $\vec{x}$, $\vec{x}_0$ vont de l'origine du ressort à la masse

ou $\vec{F}_k = -k\,(P - P_0)\,\hat{u}$, avec $\hat{u}$ le vecteur unitaire qui va du ressort à la masse

EXEMPLE :



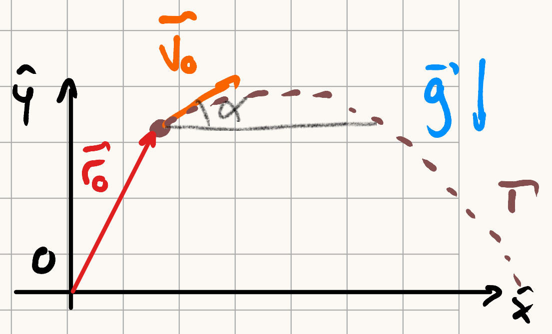
Les deux ressorts ont une longueur au repos d/2

- $\vec{F}_{k,1} = -k\left[\left(\frac{d}{2} - \Delta x\right)\hat{e}_x - \left(\frac{d}{2}\right)\hat{e}_x\right] = -k(-\Delta x)\hat{e}_x$
$= k\,\Delta x\,\hat{e}_x$

- $\vec{F}_{k,2} = -k\left[\left(\frac{d}{2} + \Delta x\right)(-\hat{e}_x) - \left(\frac{d}{2}\right)(-\hat{e}_x)\right] = -k(\Delta x)(-\hat{e}_x)$
$= k\,\Delta x\,\hat{e}_x$

$\Rightarrow \vec{F}_{k,1} = \vec{F}_{k,2} = k\,\Delta x\,\hat{e}_x$

* Force de frottement fluide : $\vec{F}_b = -b \cdot \vec{v}$



* Balistique : $\vec{a} = (0,-g) \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{g}\, t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$$

* Balistique avec frottements $\rightsquigarrow$ $v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t}$

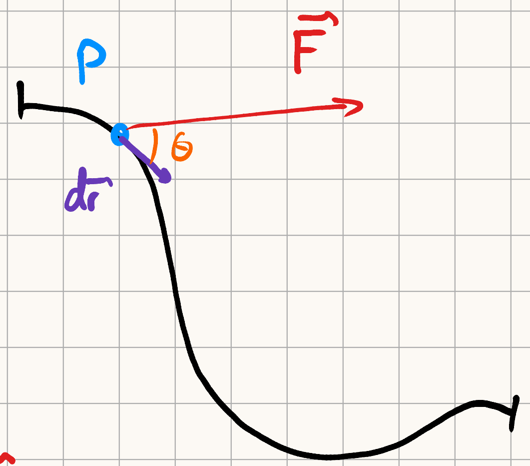
* Référentiel non-galiléen : $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_R(P)$

$\Rightarrow$ si on cherche $\vec{a}_{R'}(P)$, il faut exprimer

$$m \cdot \vec{a}_{R'}(P) = \underbrace{m \cdot \vec{a}_R(P)}_{= \sum \vec{F}^{ext}} - m \cdot \vec{a}_R(O') - m \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'P} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}) - 2m\, \vec{\omega} \wedge \vec{v}_R(P)$$

$\rightarrow$ Forces d'inertie "non-physiques"

3. Energie



- Travail d'une force pour un déplacement infinitésimal

$$\delta W^{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Travail total d'une force $\quad W_{AB}^{\vec{F}} = \int_{\Gamma} \delta W^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

- Energie cinétique $\quad E_{cin} = K = T = \frac{1}{2} m v^2$

- Thm. de l'énergie cinétique : $\quad W_{AB}^{\vec{F}} = E_{cin,B} - E_{cin,A}$

* Energie potentielle : pour des forces <u>conservatives</u>

$$W_{AB}^{\vec{F}_c} = E_{pot,A} - E_{pot,B}$$

→ la force "dérive du potentiel", $\vec{F} = -\dfrac{dE_{pot}(x)}{dx}$.

* Pesanteur : $E_{pot} = mgz \Rightarrow \vec{F}_p = -mg\,\hat{e}_z$
* Rappel : $E_{pot} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \Rightarrow F_k = -k\Delta x\,\hat{u}$

* Equilibre $\Leftrightarrow \dfrac{d}{dq}E_{pot}(q_0) = 0$, où q est la grandeur considérée $(x, \theta, \varphi, \text{etc.})$

↳ "stable" $\Leftrightarrow \dfrac{d^2}{dq^2}E_{pot}(q_0) > 0$

↳ "instable" $\Leftrightarrow \dfrac{d^2}{dq^2}E_{pot}(q_0) < 0$

* Energie mécanique : $E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$

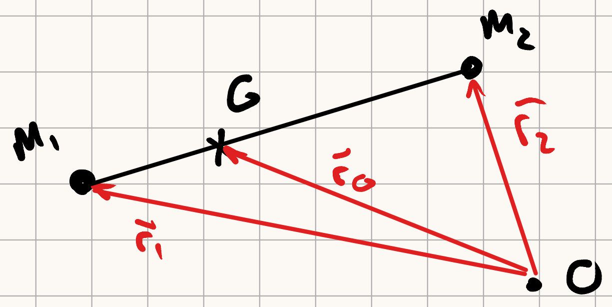
→ Forces conservatives $\Leftrightarrow E_{mec}$ conservée. Sinon, $E_{diss} = \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}$

4. Chocs et réf. CDM

- Choc = quantité de mouvement conservée : $\vec{p}_{initial} = \vec{p}_{final}$

- Choc : (i) élastique → $\Delta E_{cin} = 0$ → si $V_2 = 0$, $V_2' = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2} V_1$
  (ii) inélastique → $\Delta E_{cin} \neq 0$ $\quad V_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} V_1$
  (iii) mou → ΔE_{cin} max

- Position CDM : $\vec{r}_G = \dfrac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$



- Qté de mvt. CDM : $\vec{p}_G = M \cdot \vec{V}_G$

- Référentiel CDM → référentiel en mvt. se déplaçant à $\vec{V}_G$. Les forces d'interaction entre les différents constituants sont des forces internes.

  → problème à 2 corps : $\vec{r}_G$ et $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ $\quad \sum \vec{F}_j = m_j \ddot{\vec{r}}_j \quad \sum \vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$

5. Oscillateurs harmoniques

* libre $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0}$, où Ω_0 est la pulsation propre et la période vaut $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

$\rightarrow$ $x(t) = x_0 \cos(\Omega_0 t) + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t)$

$= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega_0^2}} \cos\left(\Omega_0 t - \operatorname{atan}\left(\frac{v_0}{\Omega_0 x_0}\right)\right)$

* amorti $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \Omega_0^2 x = 0}$

↳ cas 1 : $\gamma^2 > \Omega_0^2$ (amortissement fort)

$\rightarrow$ $x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$, où $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$

↳ cas 2 : $\gamma^2 < \Omega_0^2$ (amortissement faible)

$\rightarrow$ $x(t) = e^{-\gamma t} \cdot C \cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$

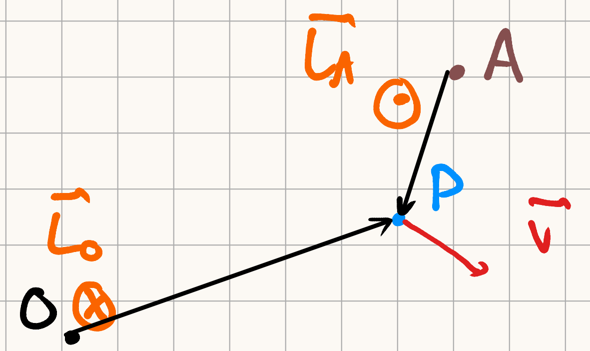
↳ cas 3 : $\gamma^2 = \Omega_0^2$ (amortissement critique)

$\rightarrow$ $x(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t}$, où $\lambda = \Omega_0$

+ oscillateur forcé $\Rightarrow$ $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e \cdot t)$

$\hookrightarrow$ $x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{amorti}} + x_F(t)$, avec $x_F(t) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\Omega_0^2-\omega_e^2)^2 + (2\gamma\omega_e)^2}} \cos\left[\omega_e t - \operatorname{atan}\left(\dfrac{2\gamma\omega_e}{\Omega_0^2-\omega_e^2}\right)\right]$

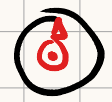
6. Moment cinétique, force centrale et gravitation



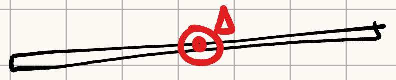
- Moment cinétique : $\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge \vec{p}$
  $\vec{L}_A = \vec{AO} \wedge \vec{p} + \vec{L}_O$
- Moment de force : $\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}$
- Thm. moment cinétique (par rapport à un point fixe) $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$
- Force centrale $\Rightarrow \vec{L}_O = \vec{cst}$
- Gravitation universelle, $\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\hat{e}_r$, $E_{pot} = -G\frac{mM}{r}$
- Potentiel effectif : pour une force centrale, on utilise $L = mr^2\dot{\varphi} = cst$
  pour faire apparaître une énergie qui ne dépend que de r.

7. Solide indéformable

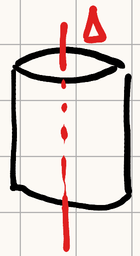
* Moment d'inertie par rapport à un axe $I_\Delta = \int_{Vol} \rho(\vec{r}) \cdot r_\perp^2 \, dV$
  - → point matériel $I_\Delta = MR^2$
  - → boule homogène $I_\Delta = \frac{2}{5} MR^2$



  - → tige mince $I_\Delta = \frac{1}{12} m\ell^2$



  - → cylindre plein $I_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$



  - → cylindre creux $I_\Delta = mR^2$
  - → disque plein $I_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$

* Théorème de Steiner $I_\Delta = I_G + md^2$

* Energie cinétique de rotation $E_{cin,\omega} = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

A comparaison translation — rotation

	Translation	Rotation (solide)
"capacité à bouger"	m	I_Δ
"caractérise le mvt"	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L}_O = I_{\Delta,O}\,\vec{\omega}$ (*)
"modifie le mvt"	$\vec{F}$	$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}$
"décrit le mvt"	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ (**)

(*) Attention, que si $\vec{\omega}$ // axe de symétrie!

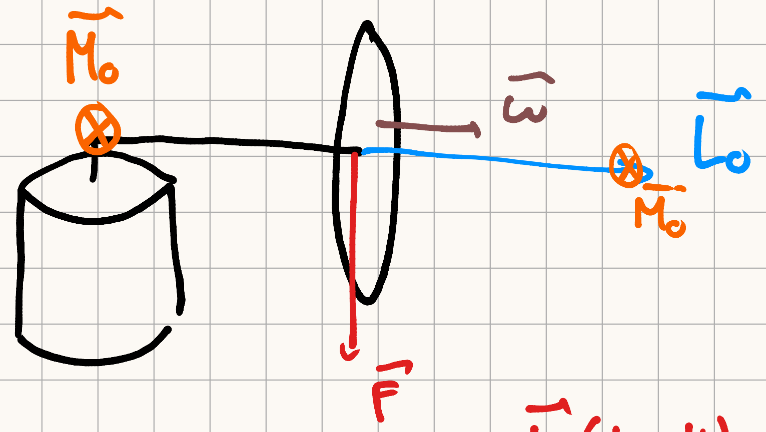
(**) valable si (i) O fixe, (ii) O=G, (iii) $\vec{V}_O \parallel \vec{V}_G$

* Collisions. Le moment cinétique est généralement conservé.

Utiliser $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$, et choisir O de manière appropriée

* Effet gyroscopique : un moment de force sur un solide en rotation propre très rapide entraîne la mise en rotation d'un solide

$\Rightarrow$ précession $\vec{\Omega}$



$$\vec{L}(t+dt) = \vec{L}(t) + dt \cdot \vec{M}_O$$