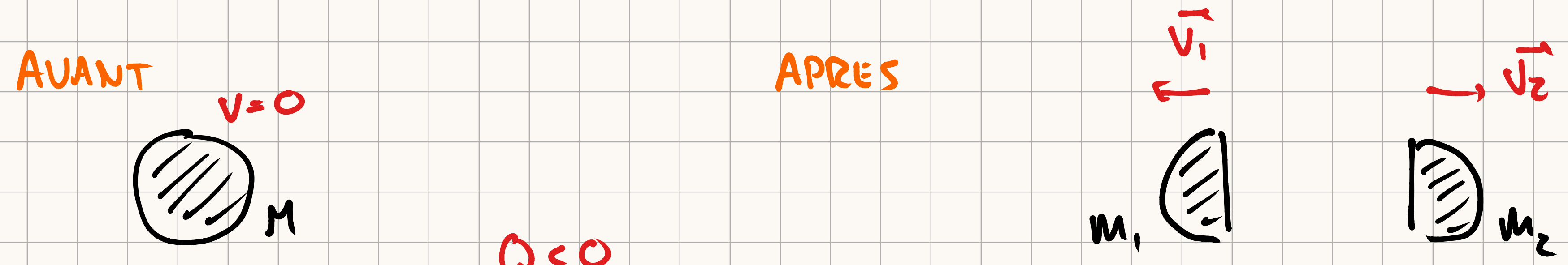
Exemple : fission d'un noyau

$E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$



$Q<0$

On mesure une énergie libérée pendant la réaction.

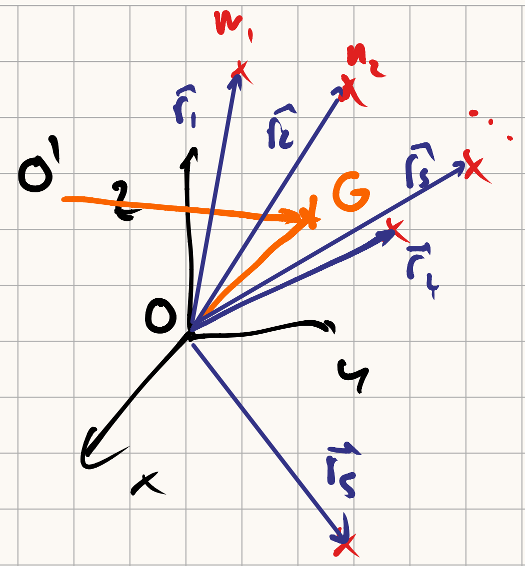
$$Q = E_{cin,f} - E_{cin,i} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 - 0 = \frac{1}{2 m_1} p_1^2 + \frac{1}{2 m_2} p_2^2$$

Conservation de $\vec{p}$ $\Rightarrow$ $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

$$Q = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \frac{1}{2} p_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} p_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} p_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{cin,1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{m_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot Q}$$

Référentiel centre de masse (CDM)



On considère un système formé de N PM de masse m_i aux positions $\vec{r}_i$, $i = 1 \dots N$.

Le centre de masse G du système est situé à la position :

$$\vec{r}_G = \vec{OG} = \frac{1}{M}\left(m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \dots + m_N \cdot \vec{r}_N\right), \text{ où } M = \sum_i m_i$$

$$= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Remarque : La position du CDM ne dépend pas du choix de l'origine.

Dynamique du système

* La qté de mvt. totale du système $\vec{p}_{tot}$ vaut

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \overbrace{m_i \vec{r}_i}^{\text{CDM}} = \frac{d}{dt} M \cdot \vec{r}_G$$

$$= M \cdot \vec{v}_G$$

* Etudions le mvt :

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt} M \cdot \vec{v}_G = M \cdot \vec{a}_G$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \cancel{\frac{d}{dt}} \sum_i \underbrace{m_i \cdot \vec{a}_i}_{\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i^{int} + \sum \vec{F}_i^{ext}}$$

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_G} = \sum_i \left(\sum \vec{F}_i^{int} + \sum \vec{F}_i^{ext} \right) = \sum_{\text{paire } ij} \overbrace{\sum \left(F_{i \to j}^{int} + F_{j \to i}^{int} \right)}^{=0} + \overbrace{\sum_i \sum \vec{F}_i^{ext}}^{\sum F^{ext}}$$

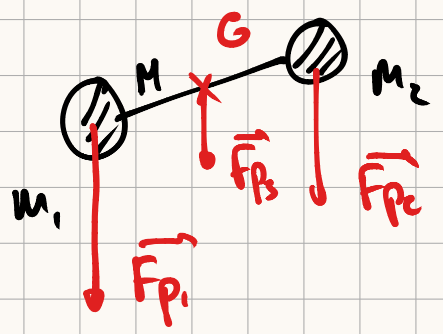
$$\boxed{= \sum \vec{F}^{ext}}$$

Résultats

① Le CDM d'un système de PM se comporte comme si celui-ci était un unique PM de masse égale à la masse totale du système et soumis à une force résultante externe unique.

② La force extérieure du CDM vaut la somme des forces extérieures sur chacun des composants du système.

Exemple : haltère



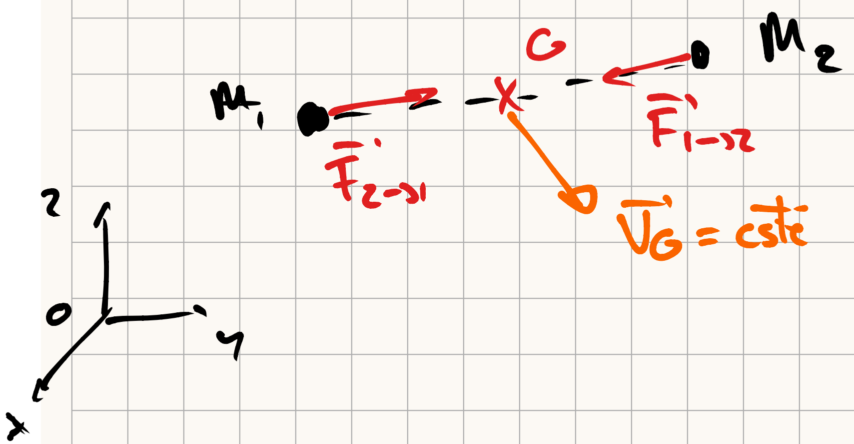
Newton : $\sum \vec{F} = \vec{F_{p_1}} + \vec{F_{p_2}} + \vec{F_{p_3}} = g(m_1 + m_2 + M)$

$$= (m_1 + m_2 + M) \cdot \vec{a_G}$$

$$\Rightarrow \vec{a_G} = \vec{g}$$

Le CDM du système va suivre un mvt. parabolique.

Référentiel CDM : problème à deux corps



On considère le cas $\vec{F}^{ext} = \vec{0}$

Pour résoudre ce problème, on se place dans le référentiel CDM tel qu'il se déplace à la même vitesse que $\vec{v}_G$.

On décrit le mouvement à l'aide de :

① position du CDM : $\vec{r}_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)$

② position relative des deux PM : $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Alors : * $\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = M \cdot \vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext} = \vec{0}$ $\longrightarrow$ réf. en translation uniforme

* $\ddot{\vec{r}}_{12} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{2\to1} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{1\to2} = \vec{F}_{1\to2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$

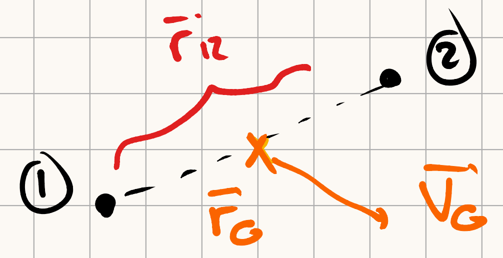
$$= \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \cdot \vec{F}_{1\to2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot \ddot{\vec{r}}_{12} = \vec{F}_{1\to2}$$

On définit $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}$ la masse réduite de l'objet telle que le mvt relatif des deux PM est décrit par

$$\vec{F}_{1\to2} = \mu \cdot \ddot{\vec{r}}_{12}$$

Mouvement de 2 PM



Connaissant $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vitesses dans le réf. du laboratoire, on cherche $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le réf. CDM.

On a un mvt. relatif $\rightarrow$ $V_R(1) = V_R(G) + V_{R'}(1) \Rightarrow V_{R'}(1) = V_R(1) - V_G$

$$\vec{V}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_G = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{\cancel{m_1\vec{v}_1} + m_2\vec{v}_1 - \cancel{m_1\vec{v}_1} - m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$= \underbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}}_{\mu/m_1}\overbrace{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}^{\dot{\vec{r}}_{12}} = \frac{\mu}{m_1}\vec{V}_{12}$$

$$\vec{V}_2 = \ldots = -\frac{\mu}{m_2}\vec{V}_{12}$$

$\Rightarrow$ Dans le référentiel CDM, les deux PM ont des vitesses opposées.

Les qtés de mvt. valent :

$$\vec{P_1} = m_1 \cdot \vec{V_1} = \mu \cdot \vec{V_{12}}$$

$$\vec{P_2} = m_2 \cdot \vec{V_2} = -\mu \cdot \vec{V_{12}}$$

la quantité de mvt totale est nulle :

$$\vec{P_{tot}} = \vec{0}$$

L'énergie vaut :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot V_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \left(\frac{\mu}{m_1} V_{12} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{\mu}{m_2} V_{12} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{m_1} \mu^2 \cdot V_{12}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{m_2} \mu^2 V_{12}^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu^2 V_{12}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} \mu^2 V_{12}^2 \overbrace{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}^{1/\mu}$$

$$= \frac{1}{2} \mu V_{12}^2$$

$$\boxed{v(t) = \ln \frac{m_0}{m(t)}}$$