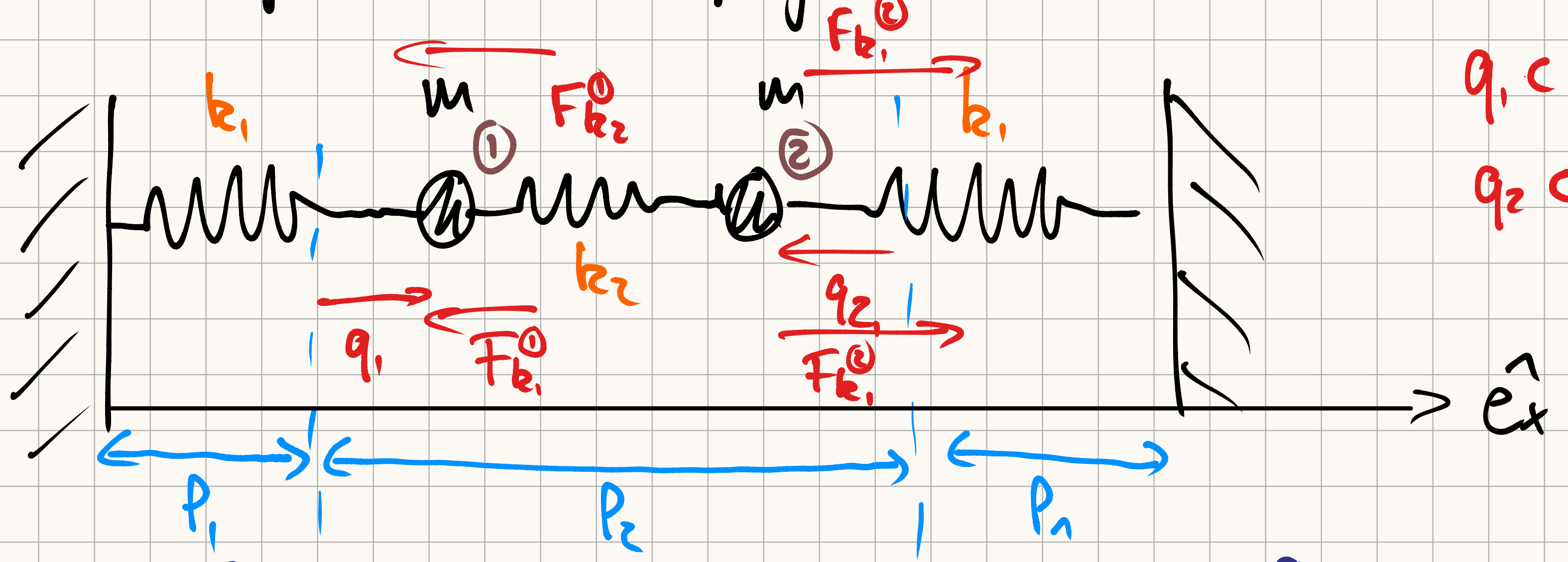
Pour aller plus loin... le couplage



$q_1 < 0 \Rightarrow$ compression

$q_2 < 0 \Rightarrow$ élongation

① $F_{k_1}^{(1)} = -k_1 q_1$

$F_{k_2}^{(1)} = -k_2 (q_1 - q_2)$

② $F_{k_1}^{(2)} = -k_1 q_2$

$F_{k_2}^{(2)} = k_2 (q_1 - q_2)$

Newton :
$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -k_1 q_1 - k_2(q_1 - q_2) \\ m\ddot{q}_2 = -k_1 q_2 + k_2(q_1 - q_2) \end{cases}$$

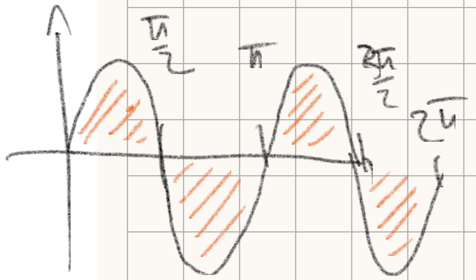
$\Rightarrow$ équation différentielle couplée !

L'important est que cet oscillateurs a plusieurs fréquences propres Ω_0 et Ω_0'

Aspect énergétique

On considère $F(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$ appliquée sur un OH amorti.

Que vaut la puissance transmise au système par la force ?



$$P(t) = F(t) . v(t) = F(t) . \dot{x}(t)$$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$$= F_0 \cos(\omega_e t) . (-C\omega_e) \sin(\omega_e t + \varphi)$$

$$= -C F_0 \omega_e \left[\underbrace{\cos(\omega_e t) \sin(\omega_e t) \cos\varphi}_{\text{périodicité de } \pi} + \cos^2(\omega_e t) \sin\varphi \right]$$

La puissance moyenne sur un cycle vaut :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt = -\frac{C F_0 \omega_e}{T} \int_0^T \dots \, dt = -\frac{C F_0 \omega_e}{T} \left(0 + \sin\varphi \underbrace{\int_0^T \cos^2 \omega_e t \, dt}_{\frac{T}{2}} \right)$$

$$= -\frac{C F_0 \omega_e}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot \sin\varphi = -\frac{C F_0 \omega_e}{2} \sin\varphi$$, comme $\sin\varphi < 0$

donc $P_{moy} > 0$.

On cherche ω_e tel que P_{moy} est maximale.

$\Rightarrow \omega_e \cdot C(\omega_e) \cdot \sin(\varphi(\omega_e))$ maximale

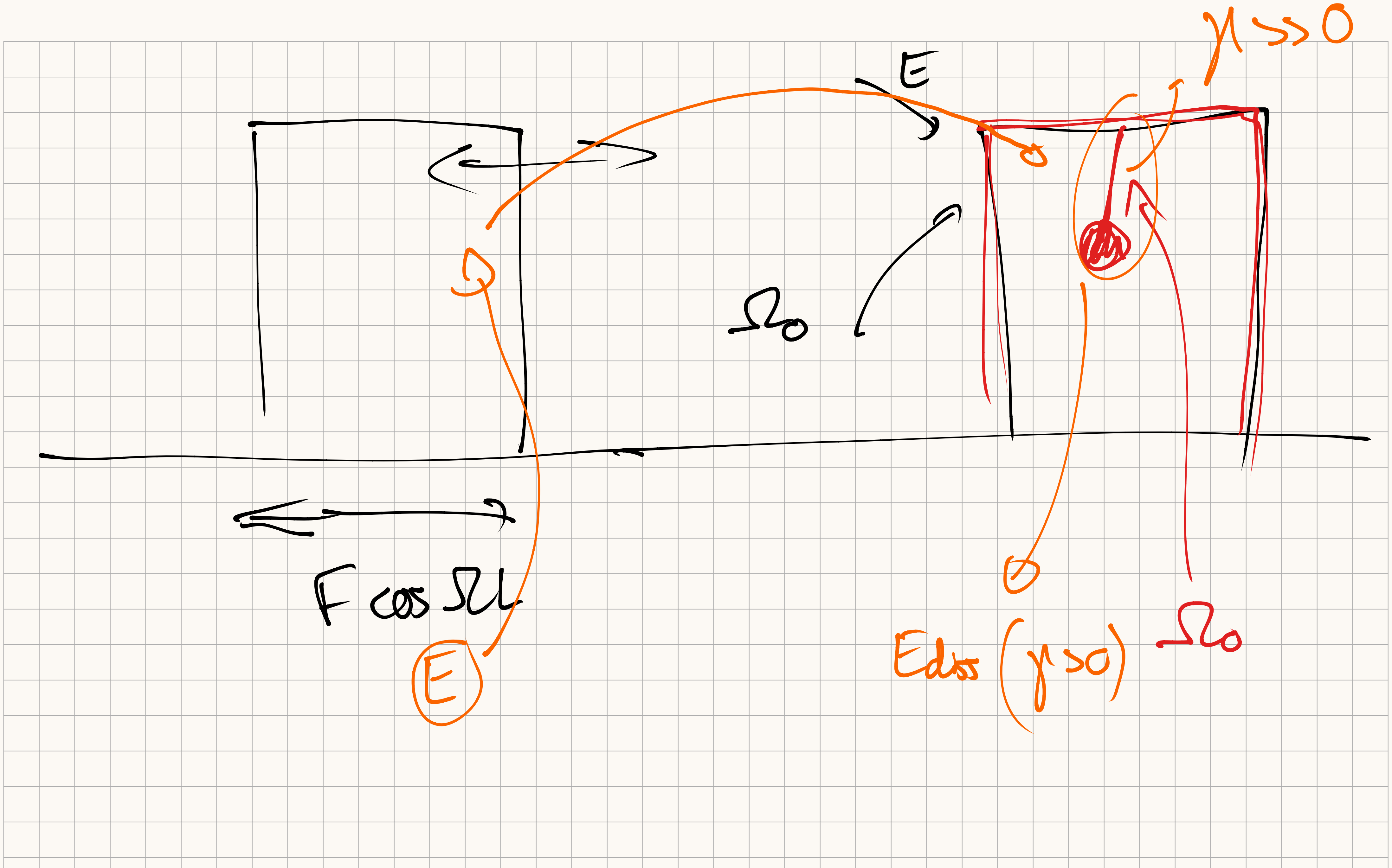
$$\Rightarrow \omega_e \cdot \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega_0^2-\omega_e^2)^2+(2\gamma\omega_e)^2}} \cdot \frac{2\gamma\omega_e}{\sqrt{\dots}}$$

$$\sim \frac{\omega_e^2}{(\Omega_0^2-\omega_e^2)^2+(2\gamma\omega_e)^2} = \frac{\frac{1}{\cancel{\omega_e^2}}}{\left[\frac{\Omega_0^4}{\omega_e^2}-2\Omega_0^2\cancel{\omega_e^2}+\cancel{\omega_e^4}+4\gamma^2\cancel{\omega_e^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\Omega_0^4}{\omega_e^2}-2\Omega_0^2+\omega_e^2\right)+4\gamma^2} = \frac{1}{\left(\frac{\Omega_0^2}{\omega_e}-\omega_e\right)^2+4\gamma^2}$$

Le maximum de puissance échangée survient quand $\omega_e=\Omega_0$.

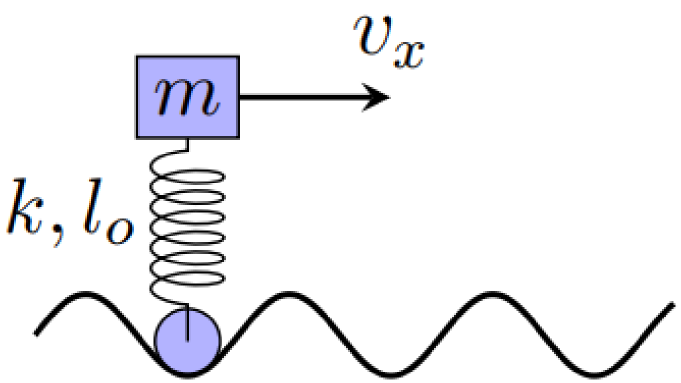
On parle de résonance d'énergie ($\neq$ résonance d'amplitude).



Champ de bosses

(Énoncé)

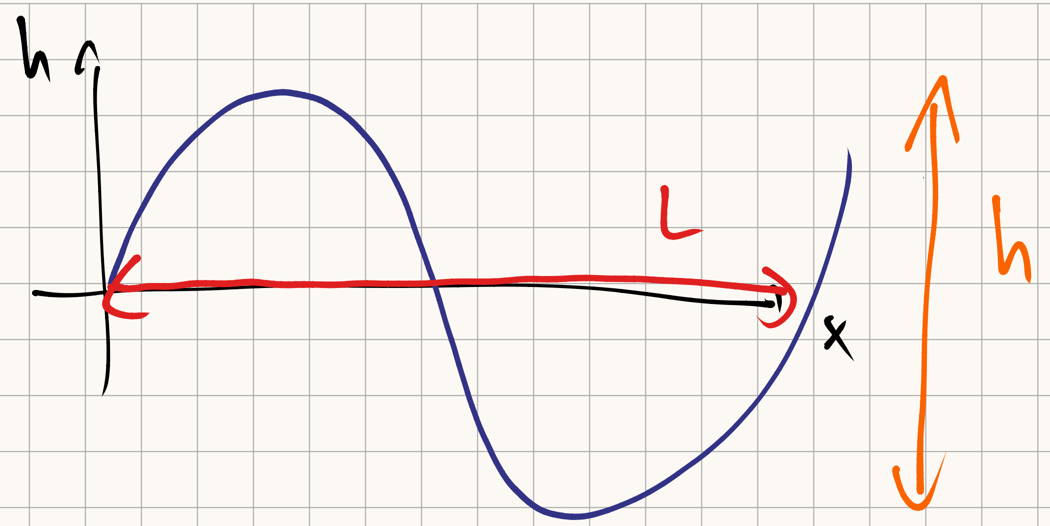
On modélise le passage d'une voiture sur un champ de bosses (route en *tôle ondulée*) de la façon suivante: un point matériel de masse m, avance avec une vitesse horizontale v_x constante. La masse est reliée à un dispositif comportant un ressort de constante élastique k et de longueur au repos l_0. Au bout du ressort, une roue sans masse, de rayon négligeable suit le profil du sol.



Le dispositif qui maintient le ressort vertical n'est pas spécifié. On suppose qu'il n'intervient pas dans le mouvement de la masse. Les valeurs des paramètres du problème sont telles que la roue ne décolle pas et que la voiture ne tape jamais la roue. Le profil du parcours (la tôle ondulée) a une forme sinusoïdale. La hauteur des bosses est H et leur longueur L.

1. Exprimer la position verticale de la roue $h(t)$ en fonction du temps.
2. En utilisant $h(t)$, déduire l'équation du mouvement de la voiture dans la direction verticale z.
3. Mettre l'équation du mouvement vertical sous la forme $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \alpha_0 \sin(\omega t)$ à l'aide d'un changement de variable $z \to u$ (une redéfinition de l'origine du temps peut aussi être nécessaire).
4. Considérer une solution stationnaire du type $u(t) = \rho \sin(\omega t - \varphi)$, où $\varphi = 0$, et trouver l'amplitude ρ des oscillations verticales de la voiture. Que peut-on dire de la vitesse de la voiture pour que le confort soit optimal ?

1



Trouve $h(t)$ qui décrit le champ de bosses.

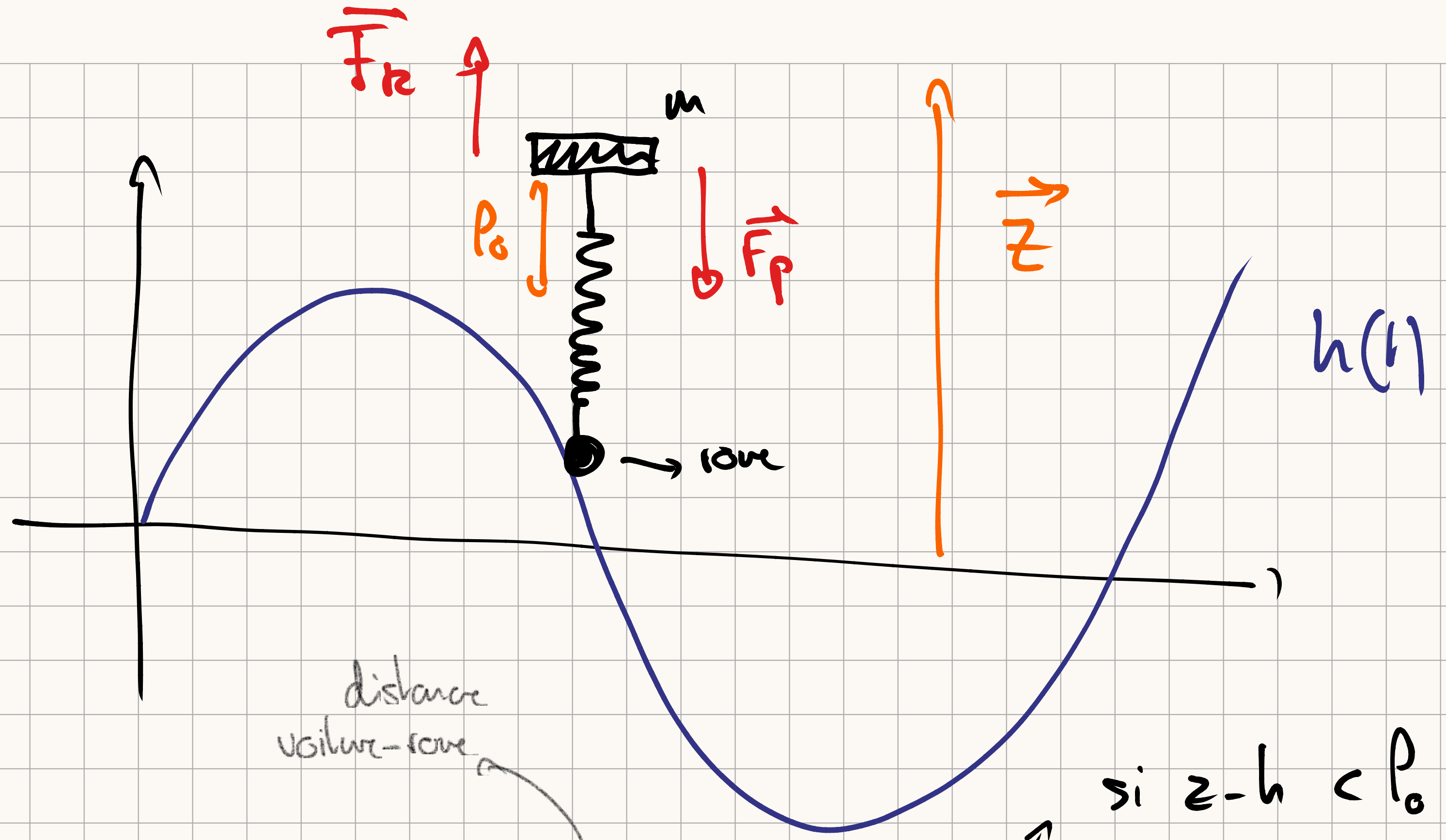
$$\frac{h}{2}\sin(\omega_e \cdot x)$$

↳ que vaut ω_e ?

$$\omega_e = \frac{2\pi}{L}$$

On sait que quand $x=L$, $\frac{h}{2}\sin(\omega_e \cdot L) = \frac{h}{2}\sin(0) = \frac{h}{2}\sin(2\pi)$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{h}{2}\sin(\omega_e x) = \frac{h}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}\cdot x\right) = \frac{h}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{L}\cdot v_x \cdot t\right) = \frac{h}{2}\sin(\Omega t)$$



+ $\vec{F_k} = -k\left(\overbrace{z(t) - h(t) - \ell_0}^{\text{distance voiture-roue}}\right)\hat{e}_z$

si $z-h < \ell_0 \Rightarrow$ compression $\Rightarrow$ vers le haut

si $z-h > \ell_0 \Rightarrow$ élongation $\Rightarrow$ vers le bas

+ $\vec{F_p} = -m\vec{g} = -mg\,\hat{e}_z$

Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\ddot{z} = -mg - k\left(z - \frac{h}{2}\sin\Omega t - \ell_0\right)$

$\Rightarrow m\ddot{z} + mg + kz - k\ell_0 = k\frac{h}{2}\sin\Omega t$

En partant de $m\ddot{z} + mg + kz - k\ell_0 = k\,\frac{h}{2}\sin\Omega t$

$$\ddot{z} + g + \frac{k}{m}z - \frac{k}{m}\ell_0 = \frac{k}{m}\,\frac{h}{2}\sin\Omega t \qquad \Omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\ddot{z} + g + \Omega_0^2 z - \Omega_0^2 \ell_0 = \Omega_0^2\,\frac{h}{2}\sin\Omega t}$$

On étudie u tel que $z = z_{eq} + u$. Que vaut z_{eq} ?

On étudie $\ddot{z} = 0$, et pas de force externe.

$$g + \Omega_0^2 z_{eq} - \Omega_0^2 \ell_0 = 0 \Rightarrow z_{eq} = \frac{1}{\Omega_0^2}\left(\Omega_0^2 \ell_0 - g\right)$$

On étudie $u = z - z_{eq} = z - \frac{1}{\Omega_0^2}\left(\Omega_0^2\ell_0 - g\right)$, $\dot{u} = \dot{z}$, $\ddot{u} = \ddot{z}$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \cancel{g} + \Omega_0^2\left[u + \cancel{\ell_0} - \cancel{\frac{g}{\Omega_0^2}}\right] - \cancel{\Omega_0^2 \ell_0} \Rightarrow \boxed{\ddot{u} + \Omega_0^2 u = \frac{\Omega_0^2}{2}\cdot h \sin\Omega t}$$

On considère la solution $u(t) = \rho \sin(\Omega t)$

$$\dot{u}(t) = \rho \Omega \cos \Omega t$$

$$\ddot{u}(t) = -\rho \Omega^2 \sin \Omega t$$

On introduit dans l'éq. du mvt.

$$\Rightarrow -\rho \Omega^2 \cancel{\sin \Omega t} + \Omega_0^2 \rho \cancel{\sin \Omega t} = \Omega_0^2 \frac{h}{2} \cancel{\sin \Omega t}$$

$$\Rightarrow \rho \left(\Omega_0^2 - \Omega^2 \right) = \Omega_0^2 \frac{h}{2}$$

$\Rightarrow$ Les amplitudes verticales valent $\rho = \frac{h}{2} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$

, où $\Omega = \frac{2\pi}{L} V_x$ et $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

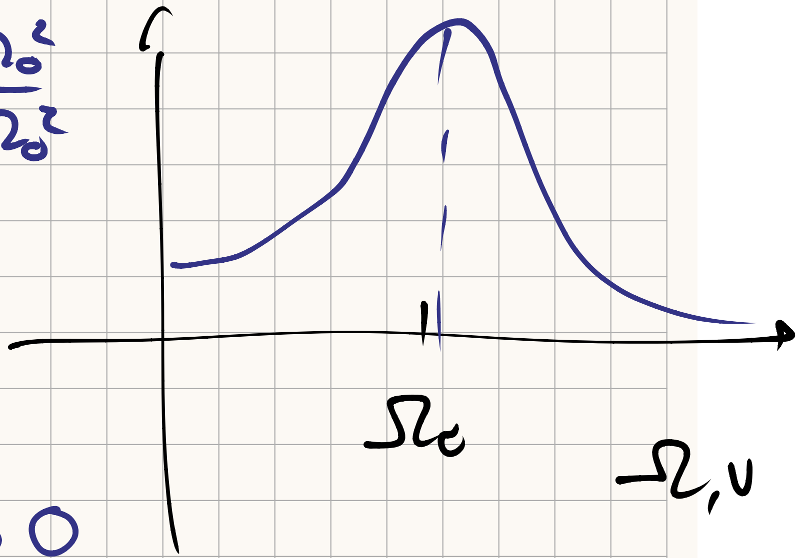
$\rho = \frac{h}{2} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$, où $\Omega = \frac{2\pi}{L} V_x$ et $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

cas 1: $\Omega = \Omega_0$, alors $\rho \to \infty$

cas 2: $\Omega < \Omega_0$, $\rho < \infty$

$\Omega = \frac{2\pi}{L} \cdot V_x$. Si $V_x = 0$, alors $\rho = \frac{h}{2} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2}$

$= \frac{h}{2}$



cas 3: $\Omega > \Omega_0$, Si $V_x \to \infty$

alors $\rho = \frac{h}{2}$ " $\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \infty}$ " $\to 0$