Cours 10 — 19.11.25

La semaine passée, on a vu ...

→ les oscillateurs harmoniques libres — $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \Omega_0^2 \cdot x = 0$ ↳ $k = cste$

$x(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$

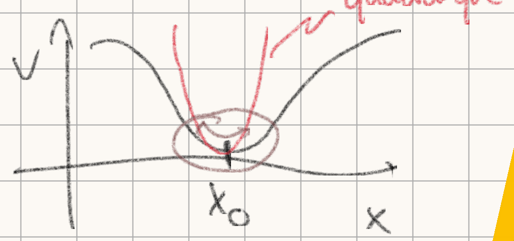
→ les oscillateurs (harmoniques) amortis $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 = 0$ → amortissement

↳ régime sous-critique $\Omega_0 > \gamma$ oscillations amorties au cours du temps

↳ régime critique $\Omega_0 = \gamma$ $\Rightarrow$ se dirige vers une amplitude nulle très rapidement

↳ amortissement fort $\Omega_0 < \gamma$ $\Rightarrow$ vitesse très lente.

→ l'approximation du potentiel quadratique

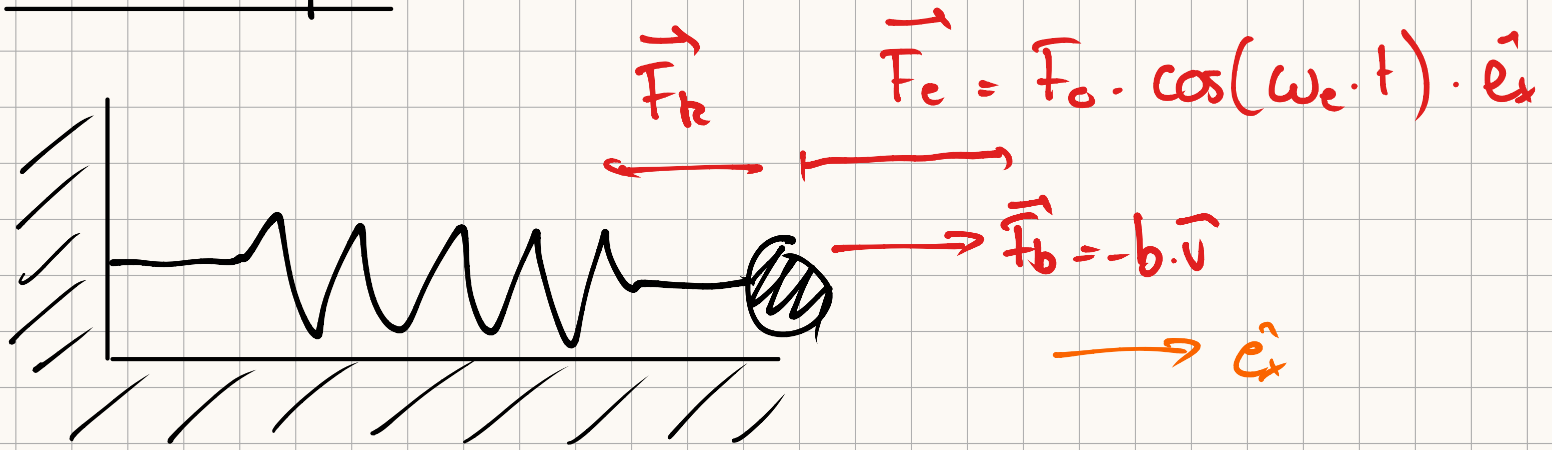


Cette semaine, on verra ...

→ les oscillateurs forcés → les oscillateurs couplés

→ le phénomène de résonance

Oscillateur forcé



On applique une force sinusoïdale au système $\vec{F_e} = F_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t)\, \hat{e}_x$

L'équation du mouvement s'écrit : $m\ddot{x} + b\cdot\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_e t)$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t)$$

, où $2\gamma = \frac{b}{m}$, $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Il s'agit d'une ED du 2^e ordre, avec second membre qui dépend du temps.

La solution est de la forme :

$$x(t) = x_h(t) + x_F(t)$$

solution particulière qui "match" avec la forme du 2nd membre.

homogène ~ sans second membre

Partie homogène : Il s'agit d'un oscillateur amorti. Toutes les solutions partagent la propriété $\lim_{t \to \infty} x_h(t) = 0$.
Les oscillations sont nulles pour un temps $t > \tau$.

Partie particulière : On a que $\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} (\cancel{x_h(t)} + x_F(t)) = x_F(t)$.

Si $t > \tau$ ("assez grand"), on rentre dans le régime permanent qui est entièrement décrit par l'excitation $F_e(t)$.

On cherche à décrire le régime permanent. On fait quelques remarques basées sur l'observation :

① $x_F(t)$ oscille à une pulsation ω_e

② L'amplitude de $x_F(t)$ dépend de ω_e

③ La solution $x_F(t)$ est déphasée par rapport à $\vec{F_e}$

④ Cette phase φ dépend de ω_e.

On propose une solution particulière de la forme

$$x_F(t) = A\cos(\omega_e t) + B\sin(\omega_e \cdot t)$$
$$= C\cos(\omega_e t + \varphi) = C\left[\cos\omega_e t\cos\varphi - \sin\omega_e t\sin\varphi\right]$$

$\Rightarrow A = C\cdot\cos\varphi,\ B = -C\sin\varphi \Rightarrow C = \sqrt{A^2+B^2}$ et $\tan\varphi = -\dfrac{B}{A}$.

On injecte $x_F(t)$, $\dot{x}_F(t)$, $\ddot{x}_F(t)$ dans l'équation du mvt avec second membre.
Après simplification, on a :

$$\left[-A\omega_e^2 + 2\mu B\omega_e + A\Omega_0^2\right]\cdot \cos\omega_e t$$
$$+\left[-B\omega_e^2 + 2\mu A\omega_e + B\Omega_0^2\right]\cdot \sin\omega_e t = f_0\cdot\cos(\omega_e t).$$

On obtient un système de 2 équations 2 inconnues qu'on sait résoudre.

$$\begin{cases} -A\omega_e^2 + 2\mu B\omega_e + A\Omega_0^2 = f_0 \\ -B\omega_e^2 + 2\mu A\omega_e + B\Omega_0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = f_0\dfrac{\Omega_0^2-\omega_e^2}{(\Omega_0^2-\omega_e^2)^2+(2\mu\omega_e)^2} \\ B = f_0\dfrac{2\mu\omega_e}{(\Omega_0^2-\omega_e^2)^2+(2\mu\omega_e)^2} \end{cases}$$

On obtient finalement

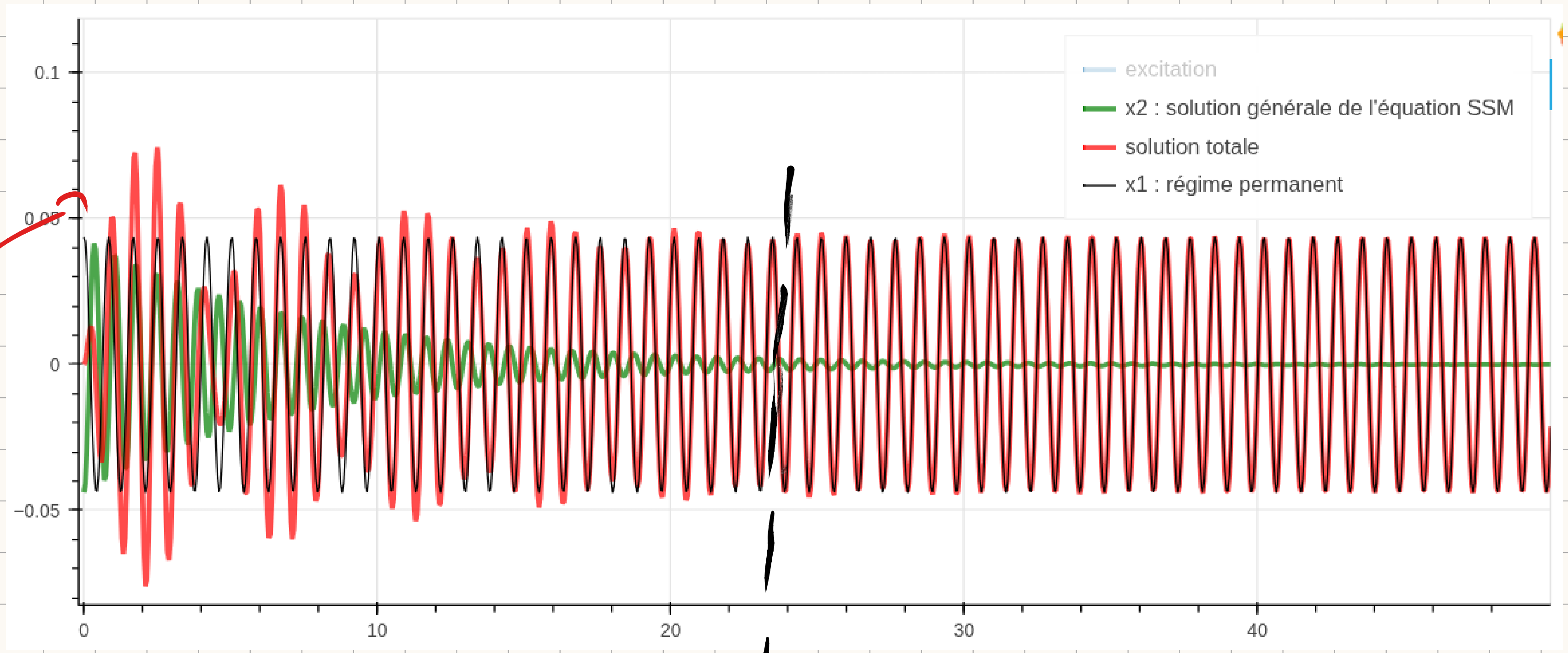
AMPLITUDE

$$\boxed{C = \sqrt{A^2+B^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega_0^2-\omega_e^2)^2+(2\mu\omega_e)^2}}}$$

et

$$\boxed{\varphi = \operatorname{atan}\left(-\frac{2\mu\omega_e}{\Omega_0^2-\omega_e^2}\right)}$$

DEPHASAGE

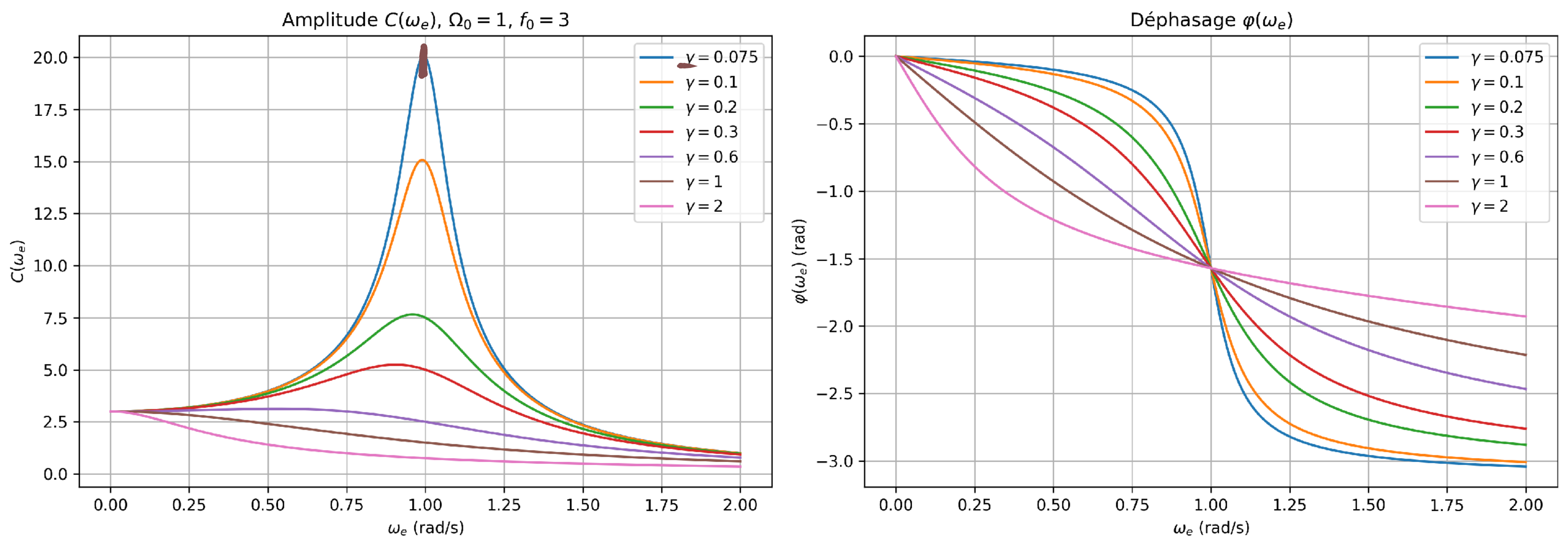


Régime transitoire "instable"

Régime permanent "stable"

$$x(t) = x_h(t) + x_F(t)$$

Régime permanent



$$C(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega_0^2-\omega_e^2)^2+(2\gamma\omega_e)^2}}$$

$$\varphi(\omega_e) = \text{atan}\left(-\frac{2\gamma\omega_e}{\Omega_0^2-\omega_e^2}\right)$$

Quand l'amplitude "explose", on parle de résonance d'amplitude

La pulsation de résonance ω_{res} dépend de l'amortissement γ.

La résonance se produit quand $C(\omega_{res})$ est maximale

On cherche le minimum du dénominateur $D(\omega_e)$

$$\frac{d}{d\omega_e} D(\omega_e) = \frac{d}{d\omega_e}\left[(\Omega_0^2-\omega_e^2)^2 + (2\gamma\omega_e)^2\right] = 0$$

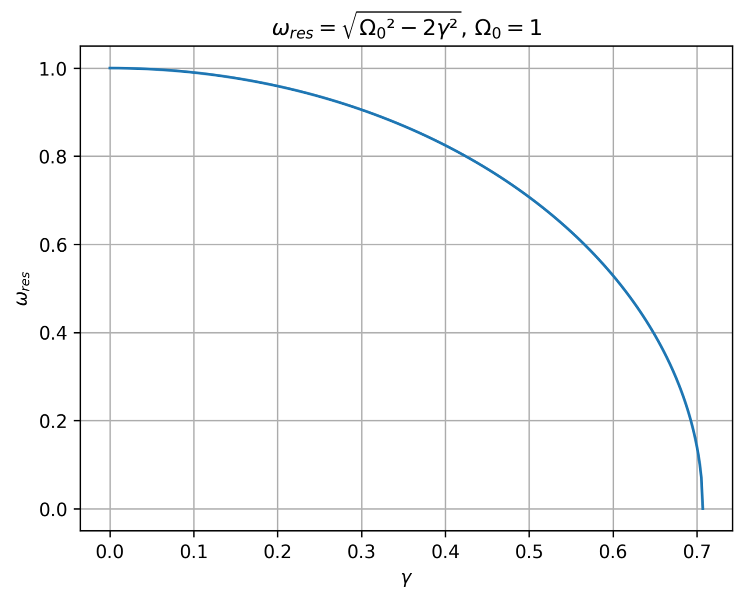
$$= 2(\Omega_0^2-\omega_e^2)(-2\omega_e) + 2\,4\gamma^2\omega_e$$

$$= \underbrace{4\omega_e}_{<0}\left[\underbrace{-\Omega_0^2+\omega_e^2+2\gamma^2}_{=0}\right]$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \omega_e^2 = \Omega_0^2 - 2\gamma^2$$

$$\Rightarrow \omega_{res} = \sqrt{\overbrace{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}^{>0}}$$



Si $2\gamma^2 > \Omega_0^2$, alors il n'y a jamais de résonance.