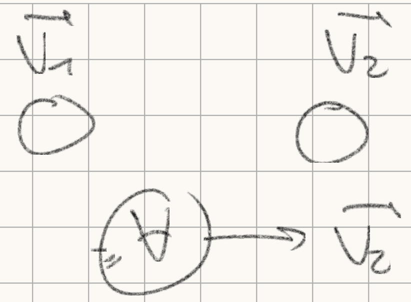
Cours 9 12.11.25



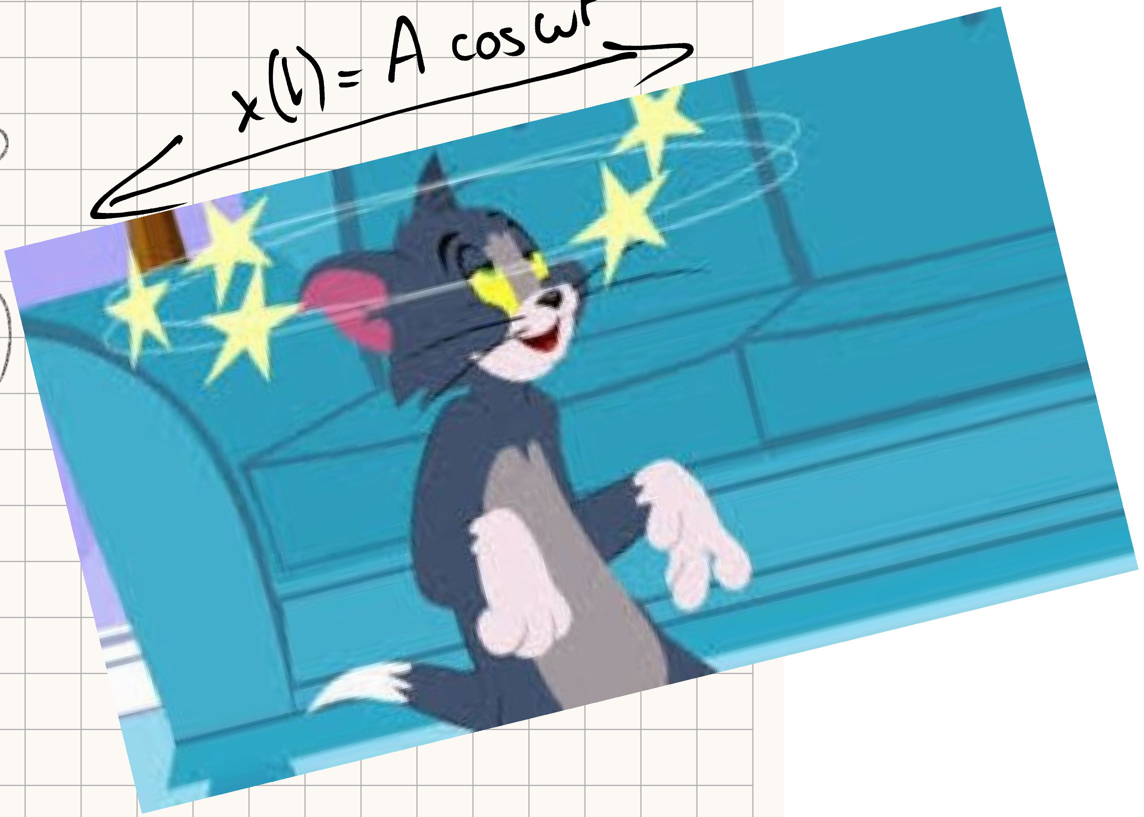

La semaine passée, on a vu...

→ les chocs élastiques
- → $\vec p$ conservée, $E_c$ conservée
- → R tel que $\vec v_2 = \vec 0$

→ les chocs mous → $\vec p$ cons., $\Delta E_c \neq 0$

→ le référentiel CDM → $(\vec r_1, \vec r_2) \overset{R_{CDM}}{\Rightarrow} (\vec r_G, \vec r_{12})$

$x(t) = A \cos \omega t$

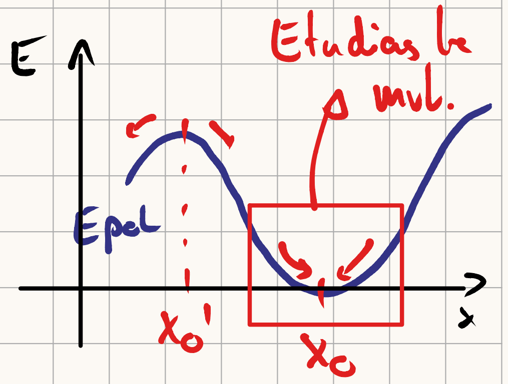


Cette semaine, on verra...

→ les oscillateurs harmoniques libres

→ les oscillateurs harmoniques forcés

# 5. Oscillateurs harmoniques

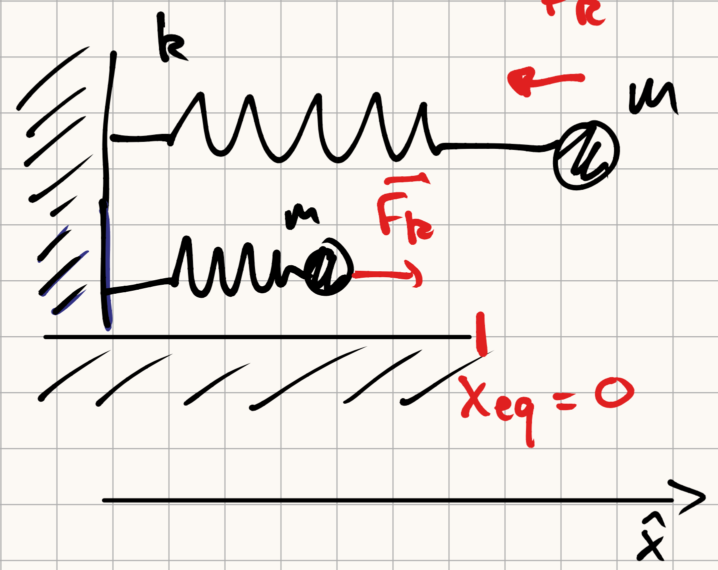



On va utiliser la 2LN pour décrire le mouvement d'un PM autour d'une position d'équilibre stable.

Lorsque le PM effectue des petites oscillations autour de sa position d'équilibre, on parle d'oscillateur harmonique.

Exemple : montres, pendule, phonons, bourse, voix, stabilité de structure

# Oscillateur Libre




Repère $(Ox)$, $x=0$ si $P = P_0$

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_k = m\vec{a}$$

Selon $\hat{e}_x$ : $\boxed{-kx = ma_x = m\ddot{x}}$

On cherche la fonction $x(t)$ telle que $m\ddot{x}(t) + k\cdot x(t) = 0$.

Il s'agit d'une équation différentielle du 2e ordre.

On veut résoudre $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ $\leadsto \frac{k}{m} \cdot x = \ddot{x}$

On propose une solution de la forme $x(t) = A \cos(\Omega_0 t) + B \sin(\Omega_0 t)$

Preuve : $x(t) = A \cos \Omega_0 t \Rightarrow \dot{x}(t) = -A \Omega_0 \sin \Omega_0 t$

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -A \Omega_0^2 \cos \Omega_0 t = \boxed{-\Omega_0^2 \cdot x(t) = \ddot{x}}$

Vraie que si $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$

L'équa. diff. $\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ a comme solution $x(t) = A \cdot \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t$, où $A$ et $B \in \mathbb{R}$ qu'on détermine grâce aux conditions initiales.

Note : on peut réécrire $x(t)$ comme $x(t) = C \cdot \cos(\Omega_0 t + \varphi)$, où $C \in \mathbb{R}$, et $\varphi \in (0, 2\pi)$ est la phase. avec $\cos(a+b)$
$= \cos a \cos b - \sin a \sin b$

On veut déterminer $A$ et $B$ grâce aux conditions initiales $x_0$ et $\dot{x}_0$.

Admettons qu'à $t=0$, on a $x(t=0)=x_0$ et $v(t=0)=v_0$.

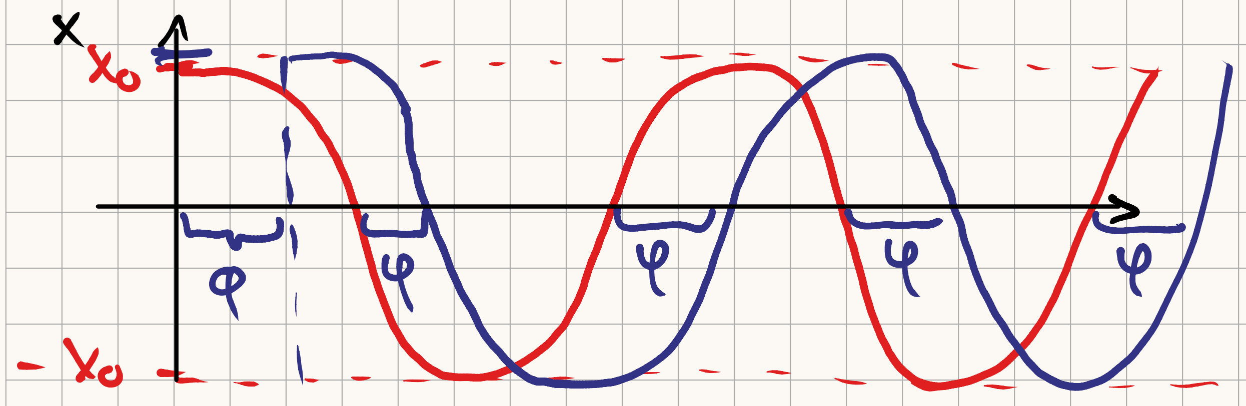
$$\text{①} \quad \left.\begin{aligned} x(t=0) &= A + 0 = A \\ &= x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = x_0$$

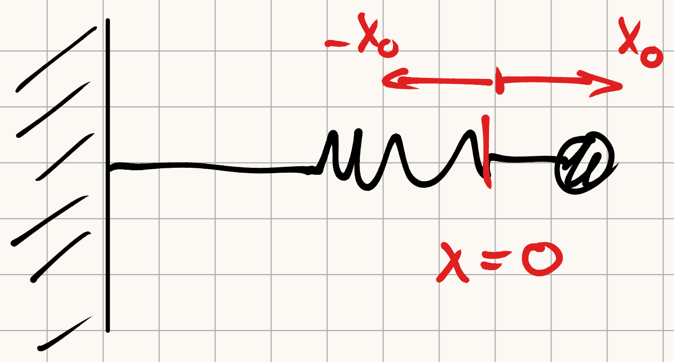
$$\text{②} \quad \dot{x}(t=0) = -A\Omega_0 \sin(\Omega_0 \cdot 0) + B\Omega_0 \cos(\Omega_0 \cdot 0)$$

$$\left.\begin{aligned} &= B\Omega_0 \\ &= v_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B = \frac{v_0}{\Omega_0}$$

Alors : $\boxed{x(t) = x_0 \cos(\Omega_0 \cdot t) + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t)}$

Alors : $\boxed{x(t) = X_0 \cos(\Omega_0 \cdot t) + \frac{V_0}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t)} = C \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t + \varphi)$

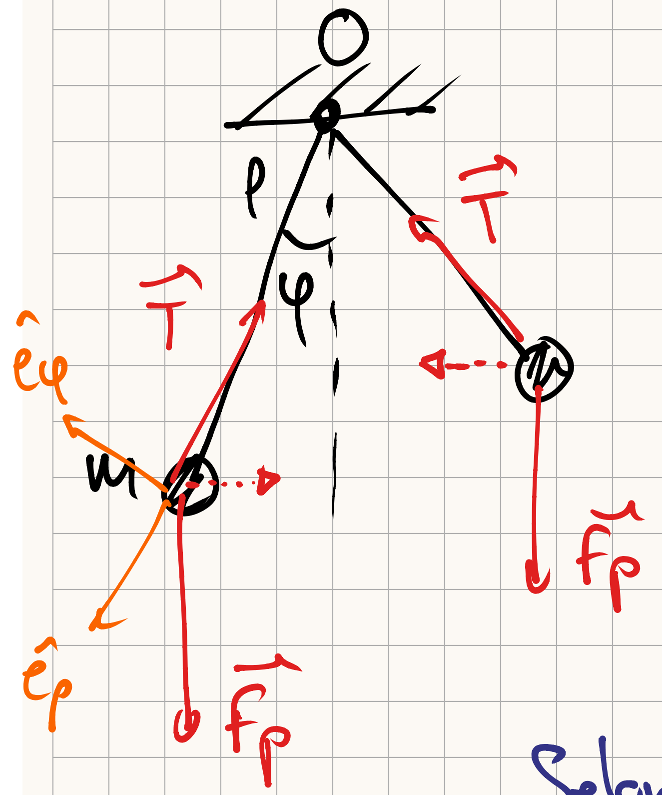



La période $T_0$ [s] est le temps que met le système pour revenir à la même position. $T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$.

La pulsation $\Omega_0$ [rad/s] est la vitesse à laquelle le système parcourt un cycle.

# Pendule oscillant




Repère $(O, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi)$ cylindrique $z=0$ / ou polaire

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$$

$$= mg\left(\cos\varphi\, \hat{e}_\rho - \sin\varphi\, \hat{e}_\varphi\right) - T\hat{e}_\rho$$

$$= m\vec{a}$$

$$= m\left(\underbrace{\cancel{\ddot{\rho}}}_{=0} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\varphi} + \underbrace{\cancel{2\dot{\rho}\dot{\varphi}}}_{=0}\right)\hat{e}_\varphi$$

car $\rho = \ell = cst$

Selon $\hat{e}_\varphi$ : $m\cdot g\,(-\sin\varphi) = m \cdot \ddot{\varphi} \cdot \ell$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi}$$

Cette équation est très dure à résoudre...

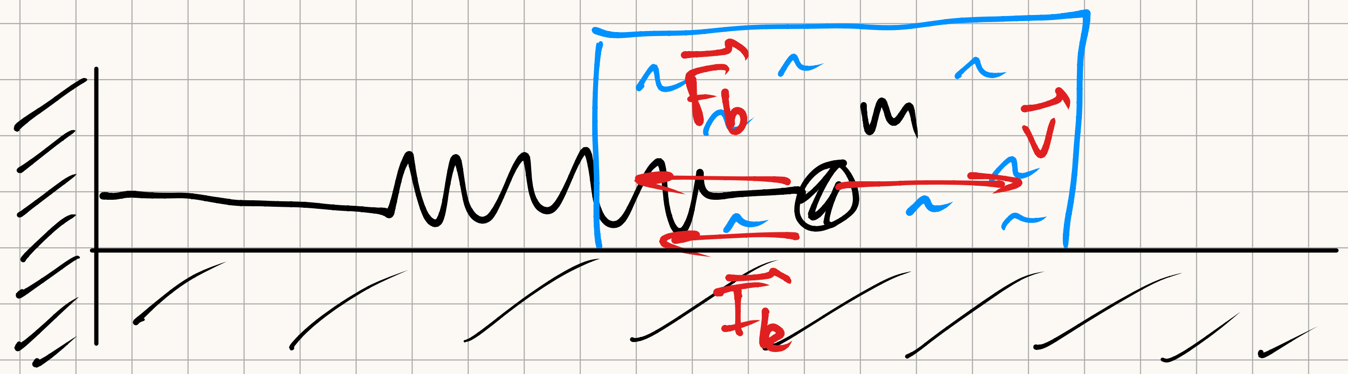
En utilisant l'approximation des petits angles $\sin\varphi \sim \varphi$ si $\varphi \ll 1$, on a :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\varphi$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\Omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$.

# Oscillateur amorti

On rajoute une force de frottements visqueux
$\vec{F_b} = -b \cdot \vec{v}$.




L'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On retrouve une equa. diff. du 2e ordre, mais ses solutions ne sont pas les mêmes qu'avant.

On part de $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

On propose une solution de la forme $x(t) = A \cdot e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

On injecte : $A\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{b}{m} A\lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m} A e^{\lambda t} = 0$

$$\underbrace{A e^{\lambda t}}_{>0} \underbrace{\left(\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right)}_{=0} = 0$$

Donc $x(t) = A e^{\lambda t}$ est solution s.s.i $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$

On pose $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\gamma = \frac{b}{2m}$. Ainsi, on cherche les solutions de

$$\boxed{\lambda^2 + 2\lambda\gamma + \Omega_0^2 = 0}$$

Le discriminant de cette eq. du 2e degré vaut

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\Omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \Omega_0^2)$$

Or, le nombre de solutions de cette eq. et leur forme dépend du signe de $\Delta$.

* Cas 1 : $\Delta > 0 \Rightarrow \gamma^2 > \Omega_0^2$ (amortissement fort)

$\rightarrow x(t) = A' \cdot e^{\lambda_1 t} + B' e^{\lambda_2 t}$ , où $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$

* Cas 2 : $\Delta = 0 \Rightarrow \gamma^2 = \Omega_0^2$ (amortissement critique)

$\rightarrow x(t) = (A'' + B'' \cdot t) \cdot e^{-\gamma t}$

* Cas 3 : $\Delta < 0 \Rightarrow \gamma^2 < \Omega_0^2$

$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left( A''' \cos(\omega t) + B''' \sin(\omega t)\right)$ , où $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} > 0$.