RAPPEL : * On cherche la solution $x(t)$ de l'équation différentielle du 2^e ordre $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, qu'on peut réécrire $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ en posant $\gamma = \frac{b}{2m}$ et $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

* On fait l'Ansatz $x(t) = A \cdot e^{\lambda t}$ qui n'est solution que si

$$\underbrace{\lambda^2}_{\text{"a"}} + \underbrace{2\gamma}_{\text{"b"}}\lambda + \underbrace{\Omega_0^2}_{\text{"c"}} = 0.$$

$$\lambda_\pm = \text{"}\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\text{"}$$

* Les solutions pour λ dépendent du signe du discriminant

$$\Delta = \text{"}b^2 - 4 \cdot a \cdot c\text{"} = 4\gamma^2 - 4\Omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \Omega_0^2)$$

* On a trois cas possibles

$\Delta > 0 \Rightarrow \gamma > \Omega_0$ Amortissement fort

$\Delta = 0 \Rightarrow \gamma = \Omega_0$ Amortissement critique

$\Delta < 0 \Rightarrow \gamma < \Omega_0$ Régime sous-critique

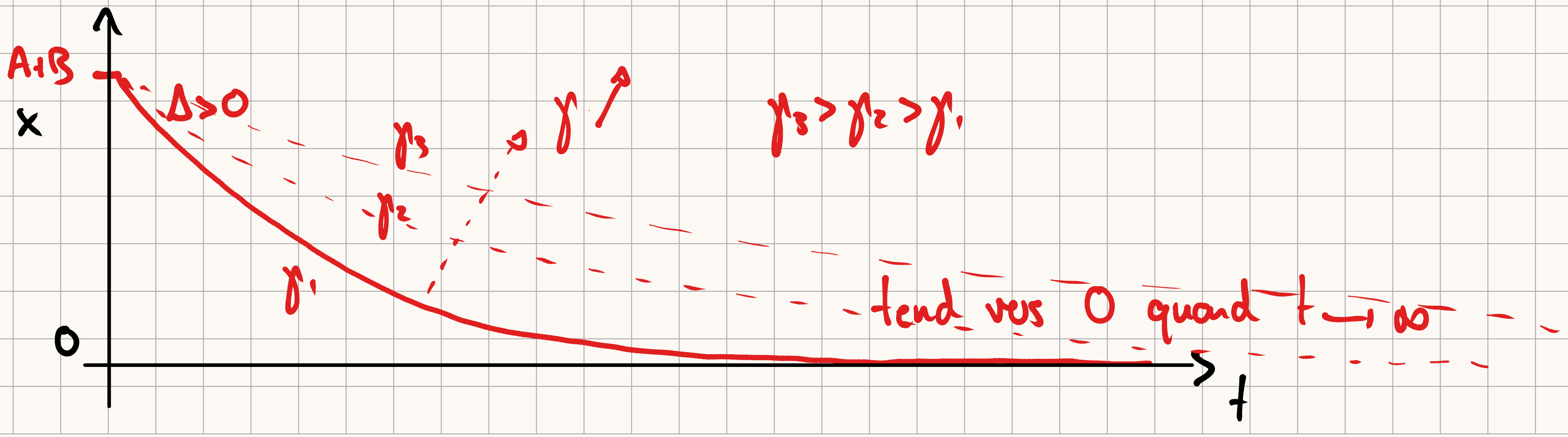
Cas 1 : $\Delta > 0 \Rightarrow \gamma^2 > \Omega_0^2$ Amortissement fort / supercritique

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4(\gamma^2 - \Omega_0^2)}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2} < 0$$

Ainsi, $\lambda_1 (+)$ et $\lambda_2 (-)$ sont solutions. On prend une combinaison linéaire des deux

$$\Rightarrow \quad x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + B\, e^{\lambda_2 \cdot t}$$

On trouve A et B grâce à x_0 et v_0.



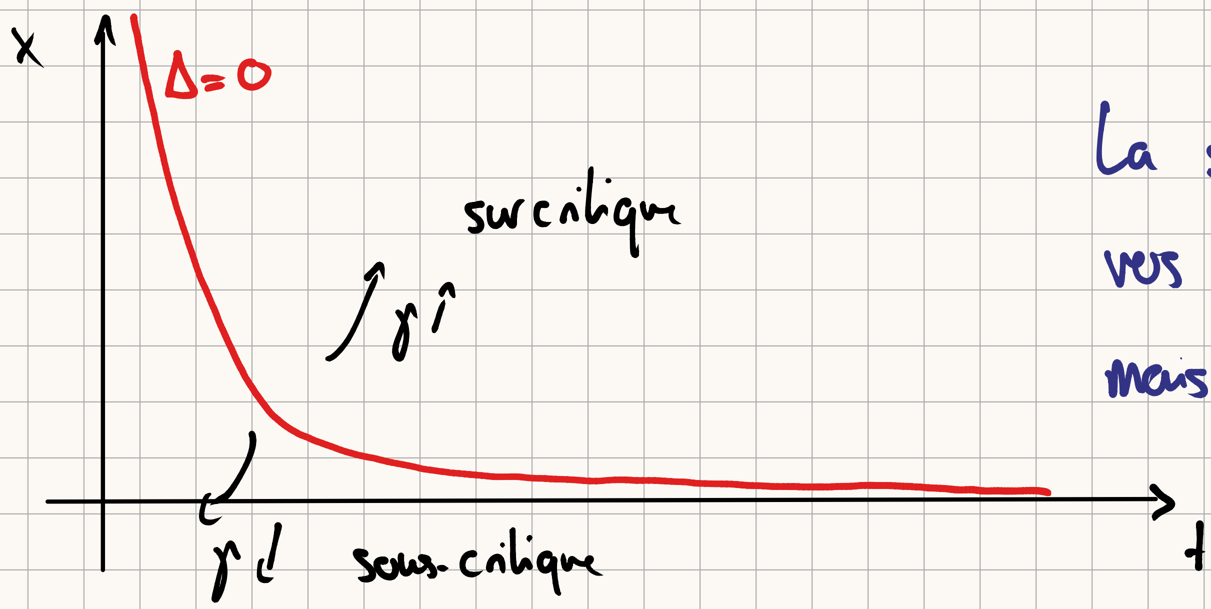
Cas 2 : $\Delta = 0 \Rightarrow \gamma^2 = \Omega_0^2$: amortissement critique

$\lambda = \frac{-2\gamma}{2} = -\gamma \Rightarrow x_1(t) = A e^{-\gamma t}$ est solution.

On peut montrer que $x_2(t) = t \cdot e^{\lambda t}$ est aussi solution de l'équa. diff. de base

On considère la comb. lin. $x(t) = A \cdot x_1(t) + B \cdot x_2(t)$

$$= (A + B \cdot t)\, e^{-\gamma t}$$



La solution tend toujours vers 0 quand $t \to \infty$ mais moins rapidement qu'avant.

Cas 3 : $\Delta < 0 \Rightarrow \gamma^2 < \Omega_0^2$: régime sous-critique

$\lambda_{1,2} = \text{“}\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\text{”}$

Il faut passer par les complexes:

$$\Delta = \sqrt{4(\gamma^2 - \Omega_0^2)} = 2\sqrt{(-1)\cdot(\Omega_0^2 - \gamma^2)} = 2\sqrt{-1}\overbrace{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}^{\omega}$$

$$= \pm 2i\omega$$

Ainsi, $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$,

$$\Rightarrow \underbrace{x(t)}_{\in \mathbb{R}} = A \cdot e^{(-\gamma + i\omega)t} + B\, e^{(-\gamma - i\omega)t}$$

$$= e^{-\gamma t}\left[\underbrace{A}_{\in \mathbb{C}}\, \underbrace{e^{i\omega t}}_{\in \mathbb{C}} + \underbrace{B}_{\in \mathbb{C}}\, \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\in \mathbb{C}}\right]$$

En posant $A = a_1 + a_2 i$, $B = b_1 + b_2 \cdot i$

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin\omega t \,, \quad e^{-i\omega t} = \cos\omega t - \sin\omega t$$

$\Rightarrow$ $x(t) = \dots$

$\in \mathbb{R}$

$$= e^{-\gamma t}\Big[\big(a_1 \cos\omega t - a_2 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t + b_2 \sin\omega t\big) \qquad \mathrm{Re}(x(t))$$

$$+ i\,\big(a_1 \sin\omega t + a_2 \cos\omega t - b_1 \sin\omega t + b_2 \cos\omega t\big)\Big] \quad + i\, \mathrm{Im}(x(t))$$

On ne prend que la partie réelle de $x(t)$.

$$x(t) = e^{-\gamma t}\Big[\overbrace{(a_1 + b_1)}^{\tilde{A} \in \mathbb{R}} \cos\omega t + \overbrace{(-a_2 + b_2)}^{\tilde{B} \in \mathbb{R}} \sin\omega t\Big]$$

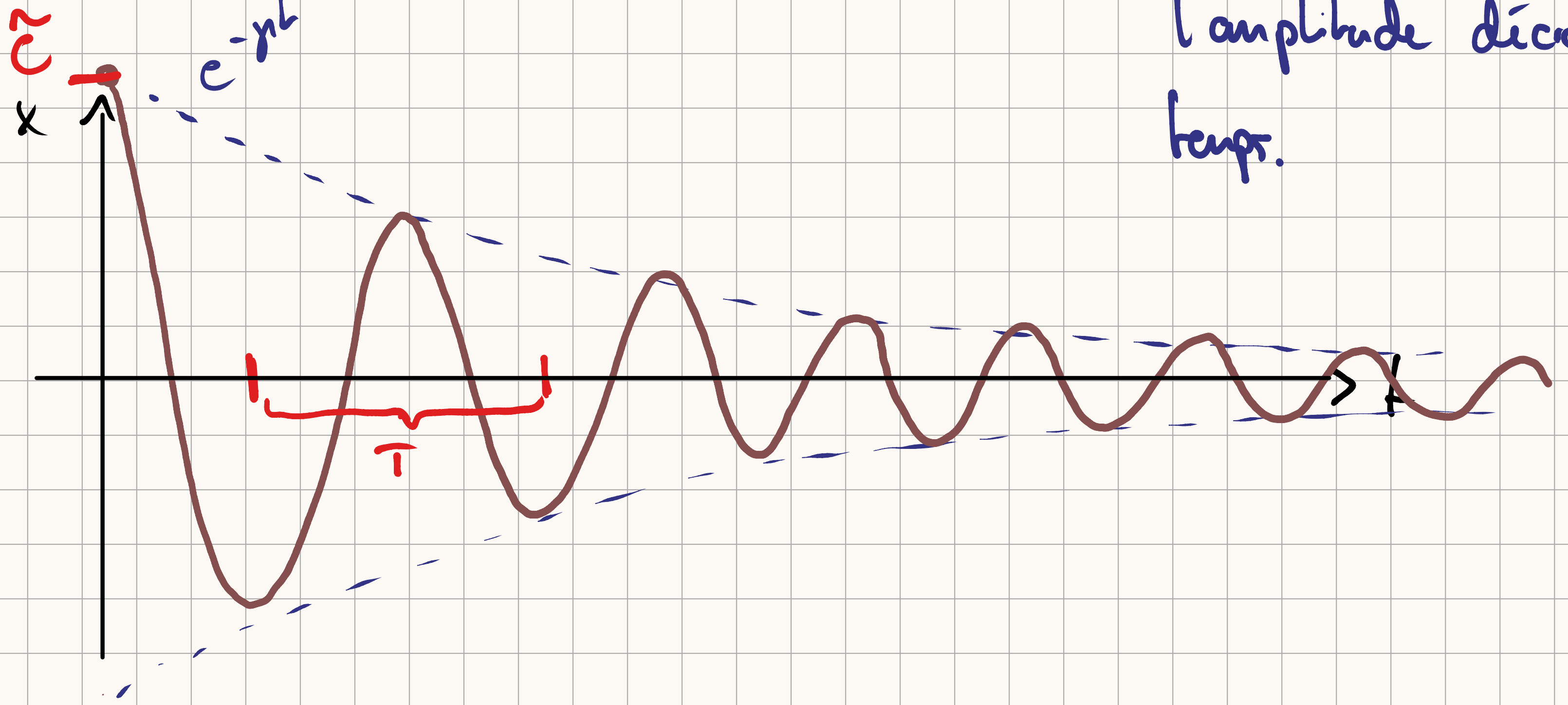
$$= e^{-\gamma t}\big(\hat{A} \cos\omega t + \hat{B} \sin\omega t\big)$$

$$= e^{-\gamma t} \cdot \hat{C} \cos(\omega t + \hat{\varphi}) \,, \text{ où } \omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}.$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \tilde{C} \cos(\omega t + \tilde{\varphi})$$

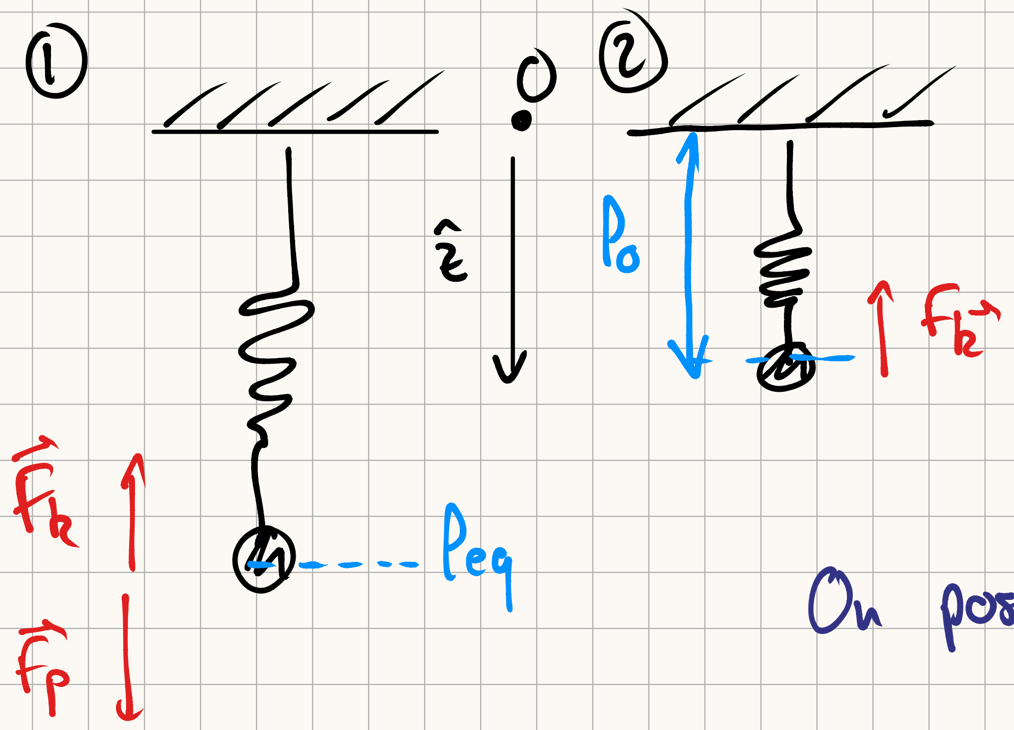
oscillations

On retrouve un pseudo OH dont l'amplitude décroît avec le temps.



On définit la pseudo-pulsation $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$, et la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}$.

Position d'équilibre



longueur au repos (équilibre de ②) ℓ_0

On a : $m\ddot{\ell} = mg - k(\ell - \ell_0)$

On pose $z = \ell - \ell_{eq}$: distance à ℓ_{eq}

$\ddot{z} = \ddot{\ell}$

$\Rightarrow m\ddot{z} = mg - k(z + \ell_{eq} - \ell_0)$. Que vaut ℓ_{eq} ? Accélération nulle $\Rightarrow mg = k(\ell_{eq} - \ell_0)$

$\Rightarrow \ell_{eq} - \ell_0 = \frac{mg}{k}$

Ainsi, $m\ddot{z} = mg - k\left(z + \frac{mg}{k}\right) = mg - kz - mg = -kz$

Toute force constante modifie la position d'équilibre, mais ne modifie pas le mouvement oscillatoire.

Considérations sur la phase φ

La solution d'un OH est donnée par

$$x(t) = x_0 \cdot \cos \Omega_0 t + \frac{V_0}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t$$

ou

$$x(t) = C \cdot \cos(\Omega_0 t + \varphi)$$, où C est l'amplitude et φ est la phase.

Que valent C et φ ?

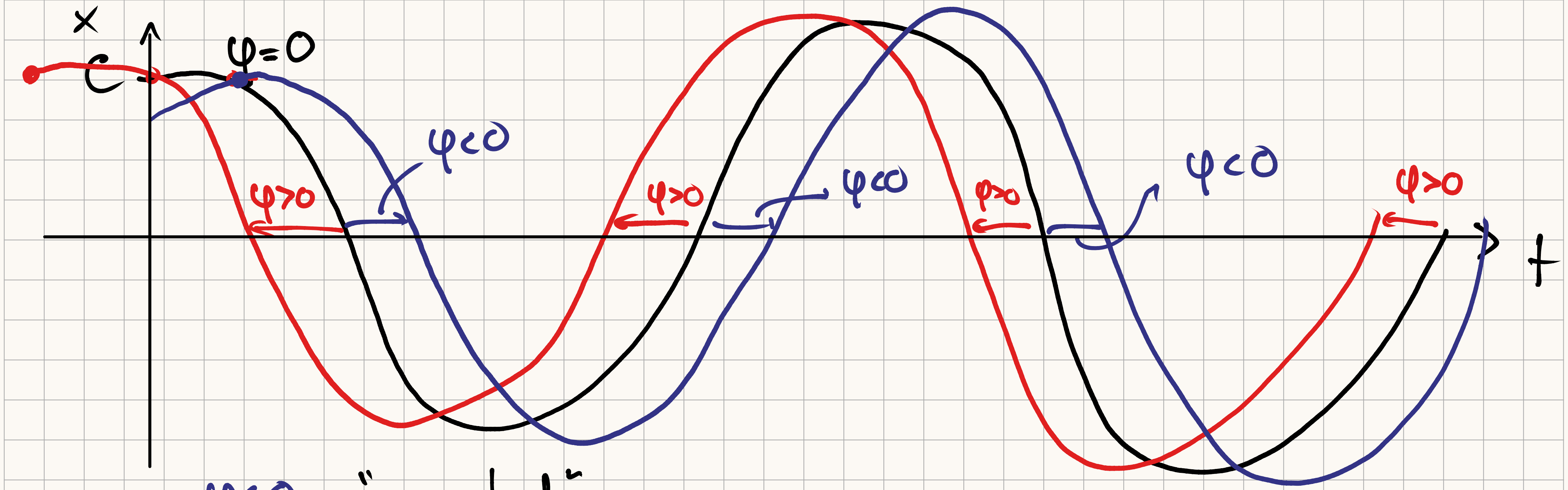
$$\begin{cases} x(t=0) = C \cdot \cos(\varphi) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = -C\Omega_0 \cdot \sin(\varphi) = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \cos\varphi = x_0 \\ -C \sin\varphi = \frac{V_0}{\Omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = C^2 = x_0^2 + \frac{V_0^2}{\Omega_0^2} \\ \frac{C \sin\varphi}{C \cos\varphi} = \tan\varphi = -\frac{V_0}{\Omega_0 x_0} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \operatorname{atan}\left(-\frac{V_0}{\Omega_0 x_0}\right) = -\operatorname{ata}\left(\frac{V_0}{\Omega_0 x_0}\right)$$

Ainsi :

$\cos(\Omega_0 t + \varphi)$

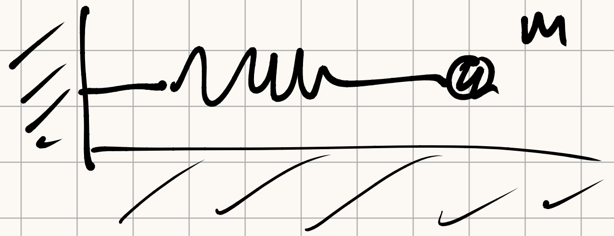
$$x(t) = \underbrace{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega_0^2}}}_{\text{AMPLITUDE}} \cdot \cos\left(\Omega_0 t - \underbrace{\operatorname{atan}\left(\frac{v_0}{\Omega_0 x_0}\right)}_{\text{PHASE, DECALAGE HORIZONTAL}}\right)$$



$\varphi < 0$: "en retard"
$\varphi > 0$: "en avance" par rapport au cas $\varphi = 0$

Aspect énergétique

Que vaut l'E_{mec} d'un OH ?



$$E_{mec}(t) = E_{pot}(t) + E_{cin}(t)$$
$$= \frac{1}{2} k x(t)^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2$$

Or $x(t) = C \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$ et $\dot{x}(t) = - C \Omega_0 \sin(\Omega_0 t + \varphi)$

$$\Rightarrow E_{mec}(t) = \frac{1}{2} k C^2 \cos^2(\dots) + \frac{1}{2} \underbrace{m \overset{k/m}{\Omega_0^2}}_{k} C^2 \sin^2(\dots)$$

$$= \frac{1}{2} k C^2 \left(\cos^2(\dots) + \sin^2(\dots)\right)$$

$$= \frac{1}{2} k C^2$$

L'énergie mécanique d'un OH est conservée.

On peut applique la conservation de l'énergie mécanique dans le cas où la seule force qui s'applique est conservative pour dériver les équations du mouvement du système.

Un OH est défini par un potentiel quadratique $E_{pot} = A \cdot x^2$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + A \cdot x^2\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} m \cdot (\cancel{2}\dot{x}) \cdot \ddot{x} + A(2x)\dot{x}$$

$$= \dot{x}\,(\underbrace{m\ddot{x} + 2Ax}_{=0})$$

$$= 0$$

↪ on retrouve l'eqt. du mvt d'un OH.