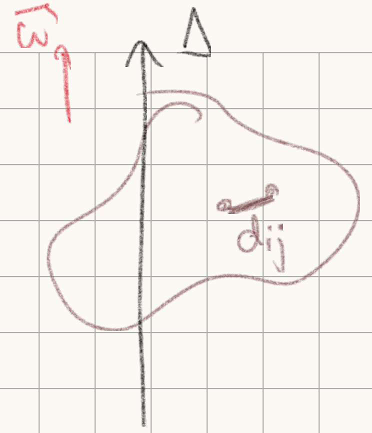
Cours 13

10.12.25



O

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

La semaine passée, on a vu...

→ la notion de solide indéformable

→ le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

→ le moment d'inertie I_Δ d'un solide autour d'un axe Δ

$$I_\Delta = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot r_\perp^2 \, dV$$

→ le théorème de Steiner

↳ $I_{\Delta'} = I_{\Delta,G} + md^2$

Cette semaine, on verra...

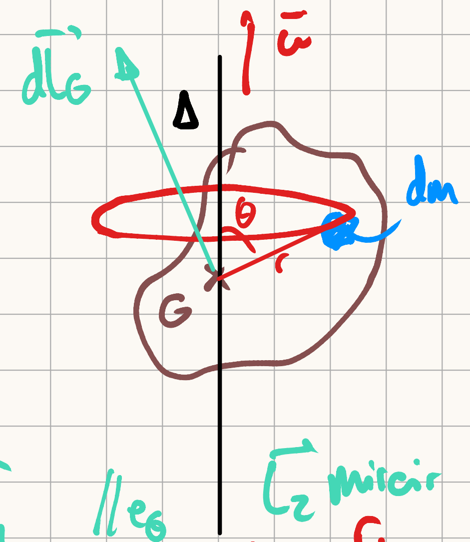
→ le moment cinétique d'un solide (suite et fin)

→ le thm du moment cinétique par rapport à un axe en déplacement

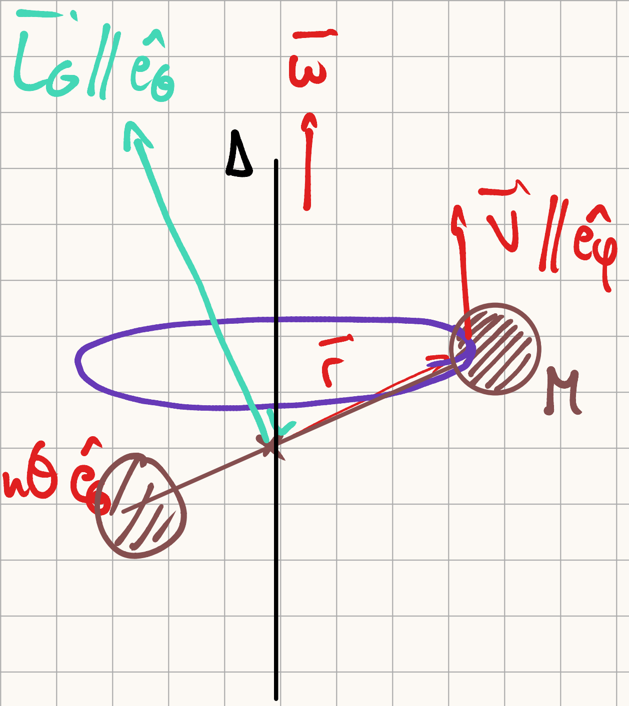
→ chocs et moment cinétique

→ le mouvement gyroscopique

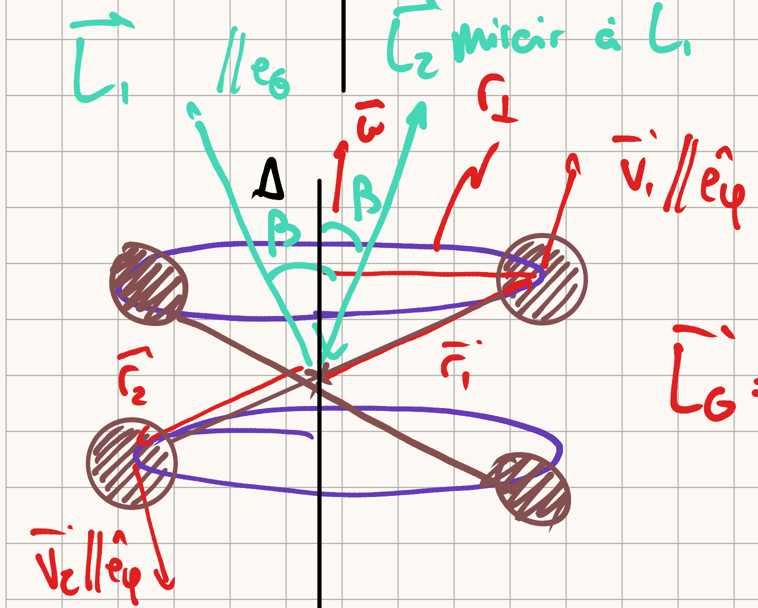
Où en étions-nous....



$$\vec{dL_G} = -\omega r^2 \sin\theta \, dm \, \hat{e}_\theta$$



MODÈLE 1 → $\vec{L_G} = -M\omega r^2 \sin\theta \, \hat{e}_\theta$



$M_1 + M_2 = M'$

MODÈLE 2

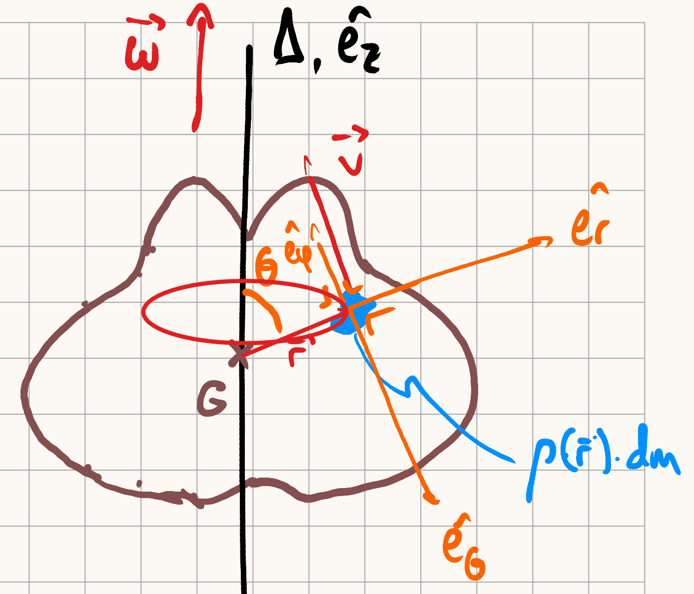
$$\vec{L_G} = M' r_\perp^2 \omega \, \hat{e}_z$$

intéressant

I_Δ ?!

GÉNÉRALISATION →

Généralisation : solide symétrique



Si notre solide (i) possède un axe de symétrie et (ii) est en rotation autour de cet axe de symétrie, alors le moment cinétique du solide est entièrement selon cet axe de symétrie.

On calcule sa composante le long de l'axe (ici, $\hat{e}_z$).

$$dL^z = (-\omega r^2 \sin\theta \, \rho \, dV \, \hat{e}_\theta)(\hat{e}_z)$$

$$= \omega r^2 \sin\theta \, dV . \rho \, (-\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_z)$$

$$= \omega r^2 \sin\theta \, dV . \sin\theta \, \rho = \omega (r \sin\theta)^2 \, dV . \rho(\vec{r})$$

$$= \omega . r_\perp^2 . \rho(\vec{r}) . dV$$

On intègre pour obtenir le moment cinétique total :

$$\vec{L}_G = \int_V dL^z \cdot \hat{e}_z \, \cancel{dV} = \int_V \omega \, \rho(\vec{r}) \cdot r_\perp^2 \, \overset{\vec{\omega}}{\hat{e}_z} \, dV$$

$$= \vec{\omega} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot r_\perp^2 \, dV$$

$$\equiv I_\Delta \cdot \vec{\omega}$$

, où Δ est l'axe de rotation qui passe par G.

Dans le cas particulier où le solide tourne autour de son axe de symétrie, on a un lien direct entre $\vec{L}_G$, $\vec{M}_G$, I_Δ, où G est fixe dans l'espace.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G = I_\Delta \cdot \dot{\vec{\omega}}}$$

Remarque : Si $\vec{\omega}$ n'est pas // à un axe de symétrie, alors $\vec{L}_G = \underline{\underline{I}}\,\vec{\omega}$, où $\underline{\underline{I}}$ est un tenseur.

Exemple : poulie massique

Que vaut l'accélération des masses.

① masse m_1 : $T_1 - m_1 g = m_1 a_1$

② masse m_2 : $T_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a_2 = -m_2 a_1$

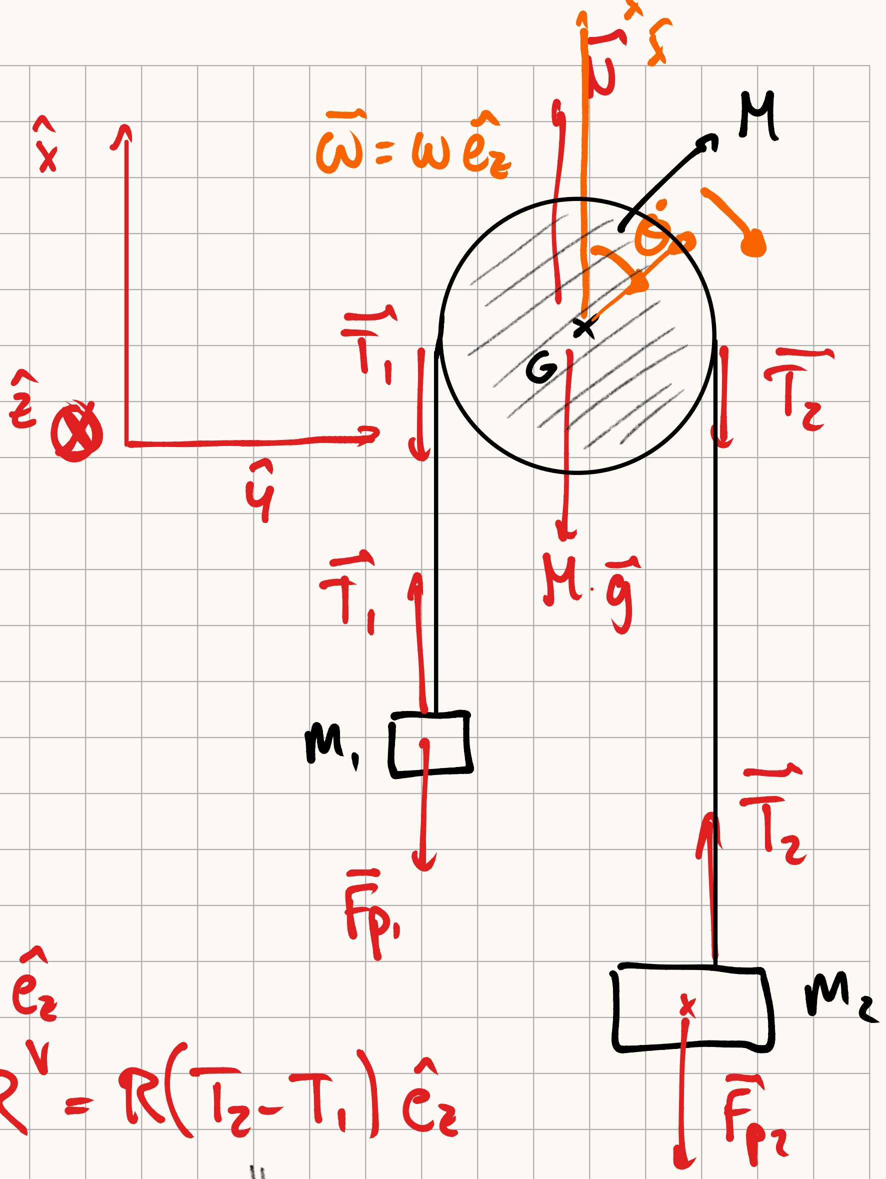
③ liaison : $a_2 = -a_1$

④ poulie : $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_G \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_G$

$$\vec{M}_G = \vec{M}_G^{T_1} + \vec{M}_G^{T_2} = -T_1 \cdot R + T_2 \cdot R = R(T_2 - T_1)\,\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow R(T_2 - T_1)\,\hat{e}_z = I_G \cdot \dot{\omega}\,\hat{e}_z$$

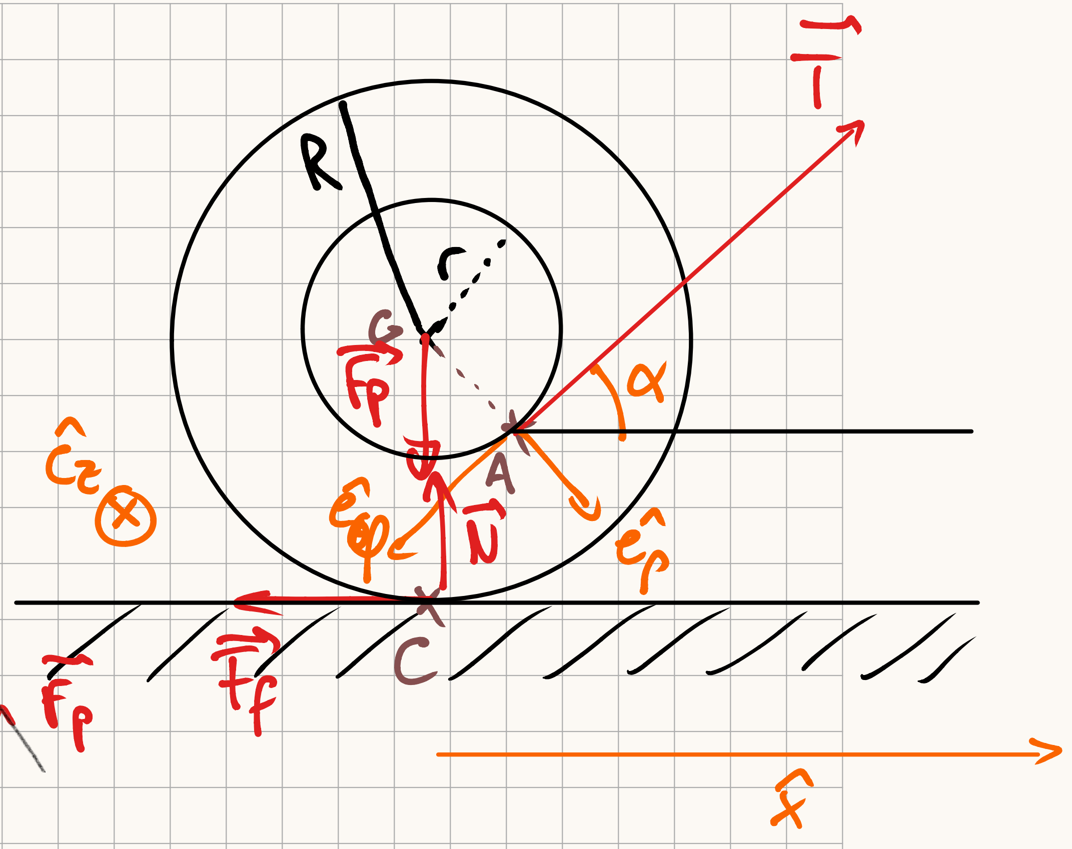
⑤ liaison poulie : $x_1 = \theta \cdot R \Rightarrow a_1 = \ddot{\theta} \cdot R = \dot{\omega} R$



maths....

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{I_G}{R^2}}}$$

Exemple: haltère tiré par un fil



① Forces en jeu.

② $\sum \vec{F} = m\vec{a}$: $T_x + F_{f,x} = m \cdot a_x$

$$\Rightarrow \boxed{T\cos\alpha - F_f = m \cdot a_x}$$

③ Moments : $\vec{M}^{tot} = \underbrace{\cancel{\vec{R}\wedge\vec{N}}}_{=0} + \vec{R}\wedge\vec{F_f} + \vec{r}\wedge\vec{T} + \underbrace{\cancel{\vec{O}\wedge\vec{F_p}}}_{=0}$

$$= \vec{R}\wedge\vec{F_f} + \vec{r}\wedge\vec{T}$$

$$= + R F_f\,\hat{e}_z + r \cdot T\,(-\hat{e}_z)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \boxed{I_G \cdot \dot{\omega}\,\hat{e}_z = (R F_f - r T)\,\hat{e}_z}$$

④ Liaison, roulement sans glissement ($\vec{V_c} = \vec{0}$)

$$\vec{V_c} = \vec{V_G} + \vec{\omega} \wedge \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = V_{G,x} + \omega\, \hat{e}_z \wedge R\,(\hat{e}_\rho)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = V_{G,x} + \omega \cdot R\,(-\hat{e}_x)$$

$$\Rightarrow \quad V_{G,x} = \omega R$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_x = \dot{\omega} R}$$

⑤ On fait des maths : $T\cos\alpha - F_f = m \cdot a_x = m\dot{\omega}R \quad \Big| \cdot R \quad \& \ ① + ②$

$$R \cdot F_f - rT = I_G \cdot \dot{\omega}$$

$$\Rightarrow TR\cos\alpha - rT = m\dot{\omega} \cdot R^2 + I_G \cdot \dot{\omega}$$

$$\Rightarrow T(R\cos\alpha - r) = \dot{\omega}(mR^2 + I_G) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\omega} = T\,\frac{R\cos\alpha - r}{I_G + mR^2}}$$

$$\boxed{\dot{\omega} = T \, \frac{R\cos\alpha - r}{I_G + mR^2}}$$

$\Rightarrow$ Le sens de rotation est relié à l'expression $R\cos\alpha - r$

① Si $\cos\alpha > \frac{r}{R}$, alors $\dot{\omega} > 0$

$\Rightarrow \alpha < \arccos\frac{r}{R}$ $\Rightarrow$ "vers la droite"

② Si $\cos\alpha < \frac{r}{R} \Rightarrow \alpha > \mathrm{acos}\frac{r}{R} \Rightarrow \dot{\omega} < 0$ $\Rightarrow$ "vers la gauche"

③ Si $\alpha = \arccos\frac{r}{R}$, alors pas de rotation.