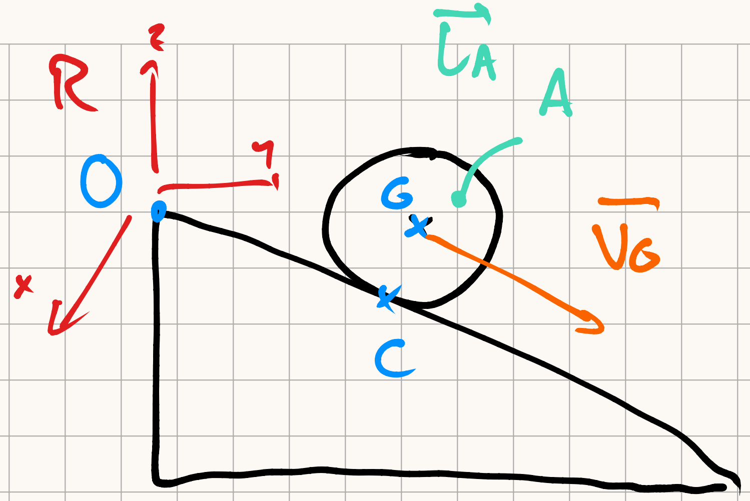
Thm. du moment cinétique



Que se passe-t-il si l'axe de rotation n'est pas fixe ?

On considère un solide en déplacement à une vitesse $\vec{V_G}$, et on calcule le moment cinétique par rapport à un point A ~~∈ solide~~. quelconque

$$\vec{L_A} = \int d\vec{L_A}(P_i) = \int_{Vol} \vec{AP_i} \wedge dm \cdot \vec{V_R}(P_i) = \int_V (\vec{AO} + \vec{OP_i}) \wedge dm \cdot \vec{V_R}(P_i)$$

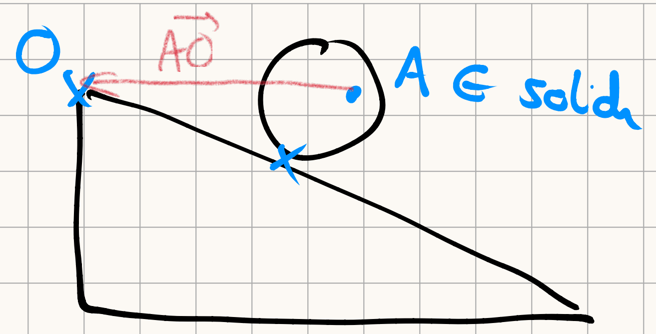
$$= \int_V \vec{AO} \wedge dm \cdot \vec{V_R}(P_i) + \underbrace{\int_V \vec{OP_i} \wedge dm\, \vec{V_R}(P_i)}_{= \vec{L_O}} = \int_V \vec{AO} \wedge dm\, \vec{V_R}(P_i) + \vec{L_O}$$

$$= \vec{AO} \wedge \int_V \underbrace{dm\, \vec{V_R}(P_i)}_{d\vec{p_i}} + \vec{L_O} = \vec{AO} \wedge \overbrace{\int_V d\vec{p_i}}^{\vec{p}_{tot} = m \cdot \vec{V_G}} + \vec{L_O}$$

$$= \vec{AO} \wedge m\vec{V_G} + \vec{L_O}$$

Il s'agit du thm. du transfert

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge m\vec{V}_G}$$



Que vaut $\dfrac{d\vec{L}_A}{dt}$?

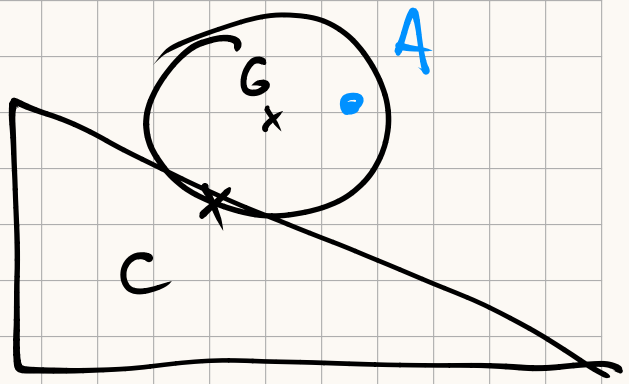
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{L}_O + \vec{AO}\wedge m\vec{V}_G\right] = \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{L}_O}_{\vec{M}_O^{ext}} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\vec{AO}\right)}_{-\vec{V}_R(A)}\wedge m\vec{V}_G + \vec{AO}\wedge \underbrace{\frac{d}{dt}\, m\vec{V}_G}_{m\cdot\vec{a}_G}$$

$$= \underbrace{\vec{M}_O}_{\sum_i \vec{M}_O^i = \sum_i \vec{OP_i}\wedge\vec{F}_i} - \vec{V}_R(A)\wedge m\cdot\vec{V}_R(G) + \vec{AO}\wedge \underbrace{m\cdot\vec{a}_R(G)}_{m\cdot\vec{a}_G = \sum_i \vec{F}_i}$$

$$= \sum_i\left(\vec{OP_i}\wedge\vec{F}_i\right) + \sum\left(\vec{AO}\wedge\vec{F}_i\right) - \vec{V}_R(A)\wedge m\vec{V}_R(G)$$

$$= \sum_i \big(\overbrace{\vec{AO} + \vec{OP_i}}^{\vec{AP_i}}\big) \wedge \vec{F_i} - \vec{V_R}(A) \wedge m\vec{V_R}(G)$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{AP_i} \wedge \vec{F_i}}_{\sum_i \vec{M}_A^i = \vec{M}_A^{tot}} - m\vec{V_R}(A) \wedge \vec{V_R}(G)$$

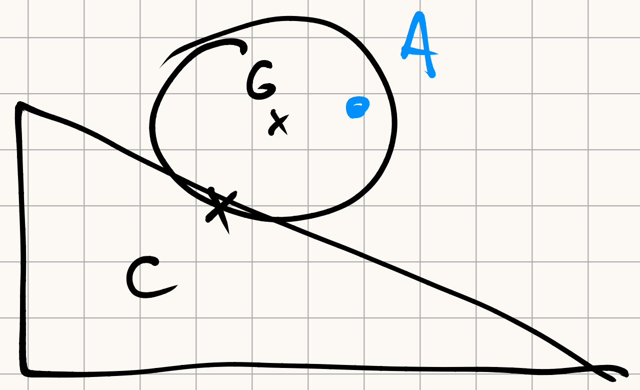


$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A - m\vec{V_R}(A) \wedge \vec{V_R}(G)}$$

Il s'agit du thm. du moment cinétique dans le cas où le point de référence A n'est pas fixe.

Remarque :

Existe-t-il un choix "malin" du point A ?



$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A - m\vec{V}_R(A) \wedge \vec{V}_R(G)$$

→ si $\vec{V}_R(A) = \vec{0}$, alors A est fixe

→ si $A=G$, alors $\vec{V}_R(A) = \vec{V}_R(G)$, alors $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$

→ si $\vec{V}_R(A) \parallel \vec{V}_R(G)$, le produit vectoriel est nul.

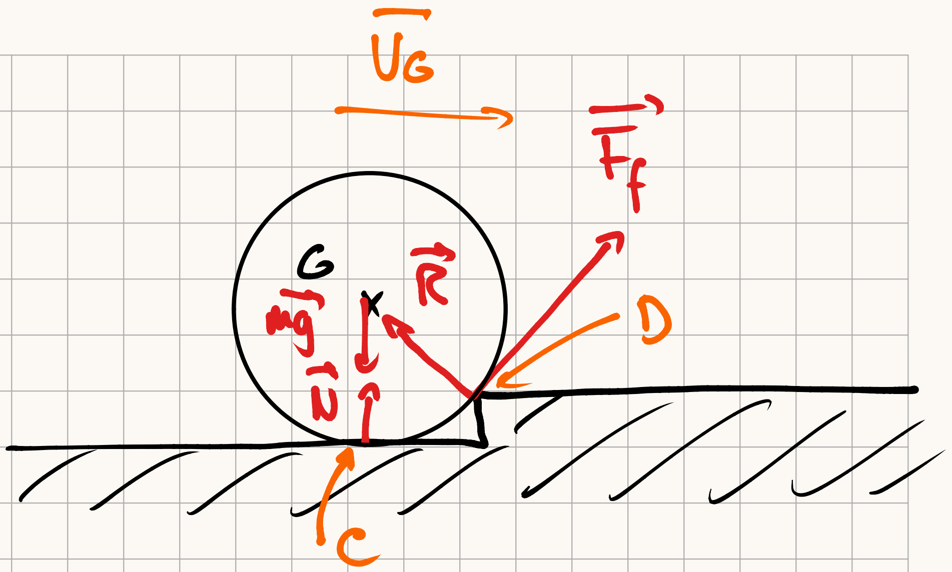
En particulier, si $A=C$, on a $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C$

En pratique, on va se placer au CDM du solide ($A=G$) ou en un point fixe dans l'absolu, ou au point de contact.

Si nécessaire, on applique le thm de Steiner et la relation $\vec{L}_G = I_G \cdot \vec{\omega}$ ou $\vec{L}_C = I_C \cdot \vec{\omega}$.

Collisions

Calculons les moments en A.



$$\vec{M}_A = \sum_i \vec{AP_i} \wedge \vec{F_i}$$

$$= \underbrace{\vec{AG} \wedge m\vec{g} + \vec{AC} \wedge \vec{N}}_{\text{forces "lentes"}} + \underbrace{\vec{AD} \wedge \vec{R} + \vec{AD} \wedge \vec{F_f}}_{\text{forces instantanées} \,\to\, \text{forces fortes}}$$

Le choix éclairé est de se placer au point de contact lors de la collision ($A = D$).

$$\vec{M}_D = \vec{DG} \wedge m\vec{g} + \vec{DC} \wedge \vec{N} \neq 0$$

Or la collision a lieu pendant un temps inf. petit $\delta t \to 0$

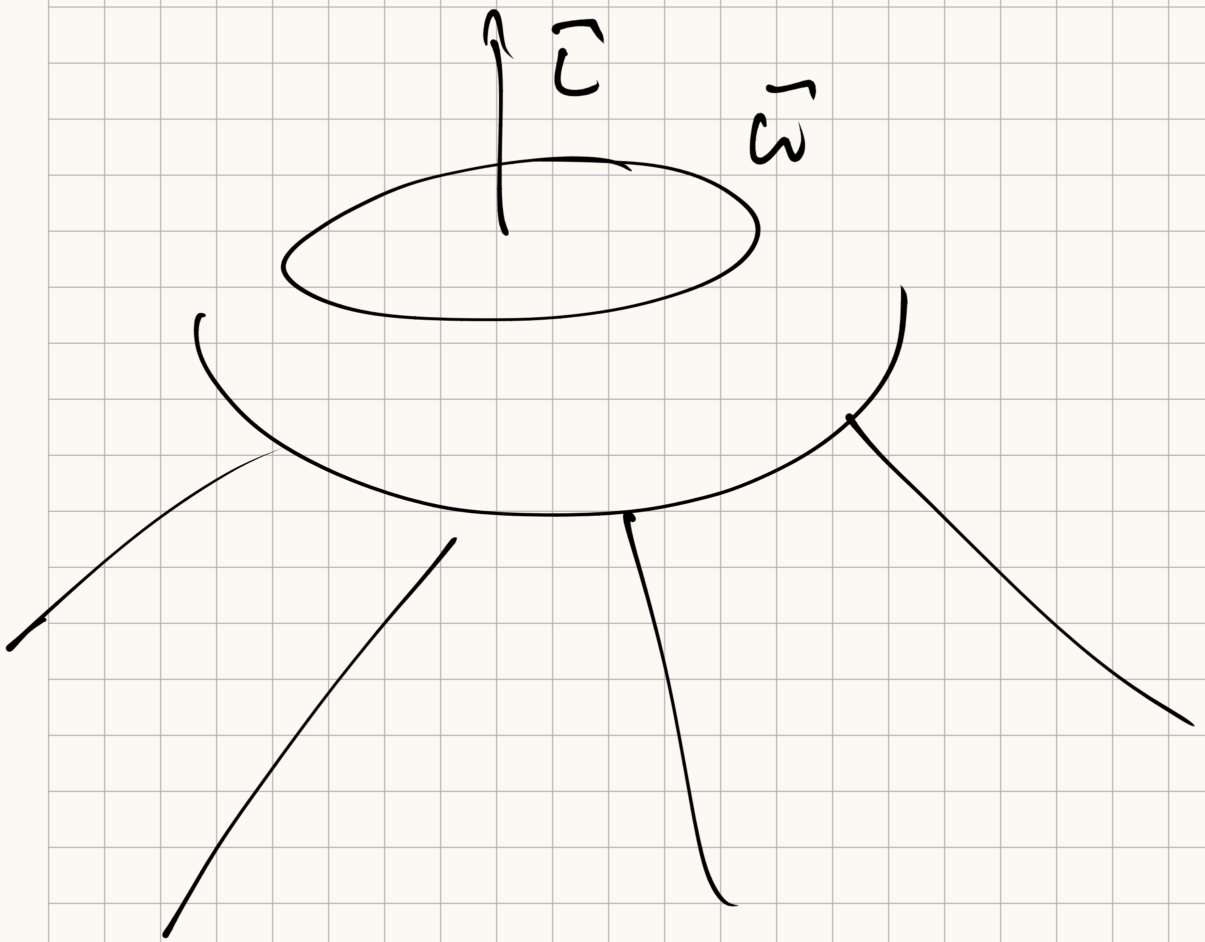
$$\frac{d\vec{L}_D}{dt} = \vec{M}_D \Rightarrow \int_{col} d\vec{L}_D = \int_{col} \vec{M}_D \cdot dt \Rightarrow \vec{L}_D^{final} - \vec{L}_D^{initial} = \vec{M}_D \int_{col} dt = \vec{M}_D \cdot \delta t$$

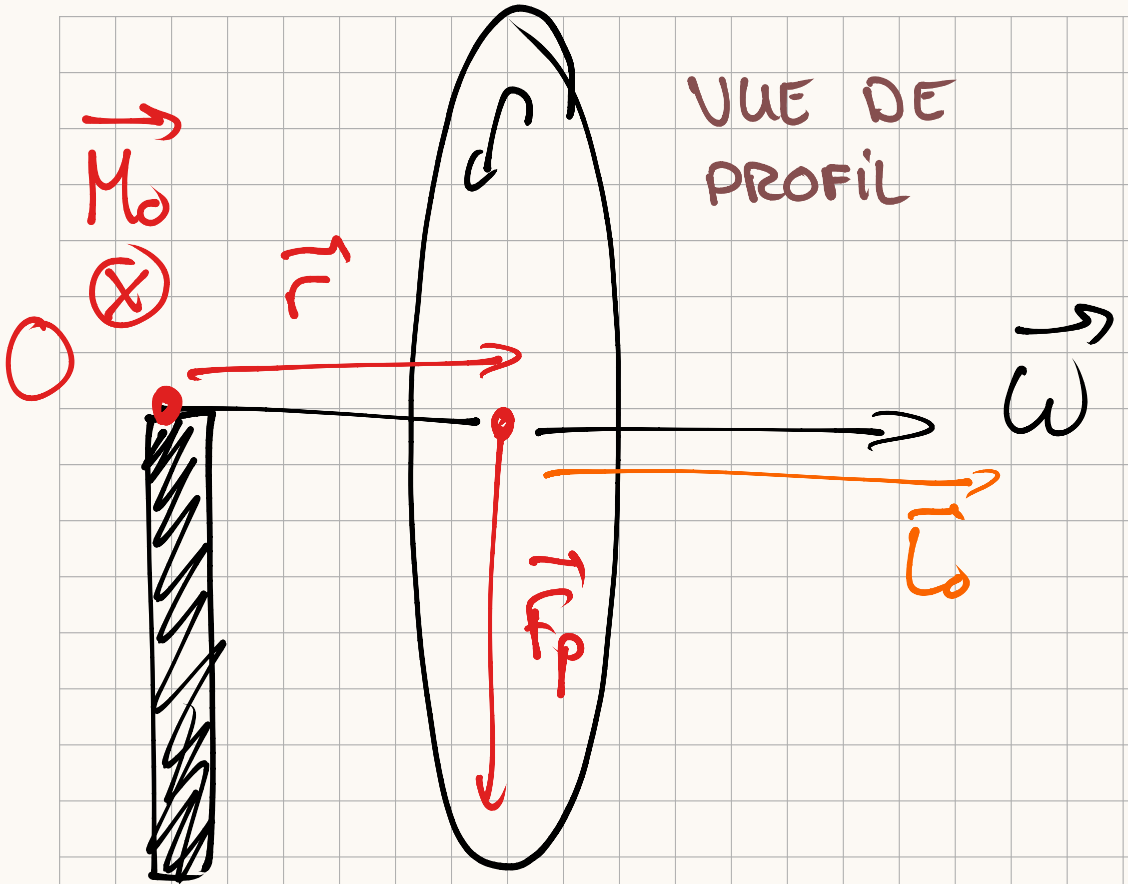
$$= \vec{0}$$

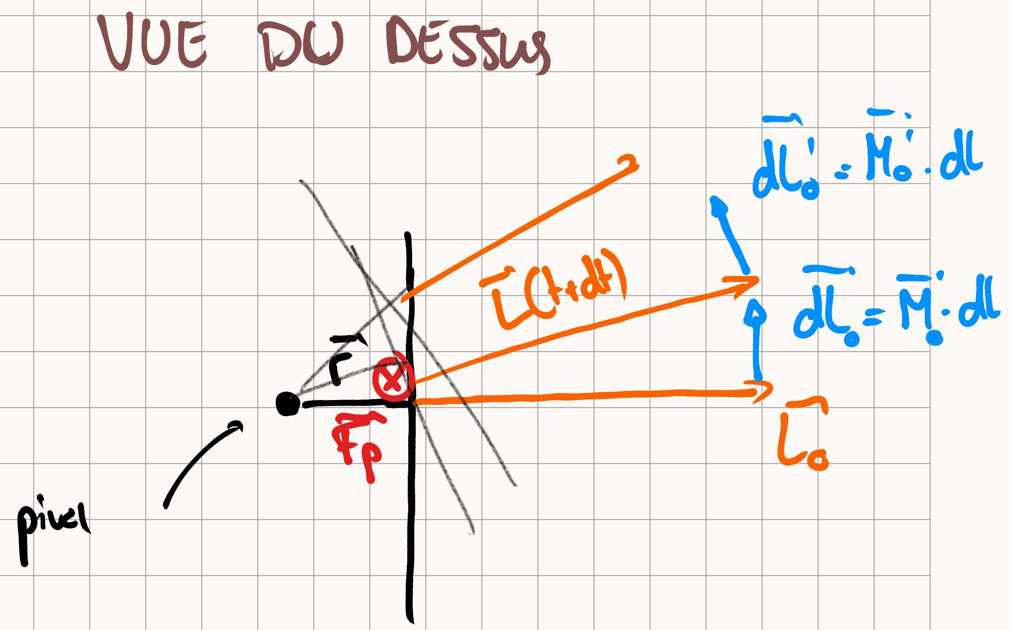
Lorsqu'on a une collision, on considère que le moment cinétique évalué au point d'impact est conservé grâce à la durée très courte de la collision.

$$\vec{L}_D^{initial} = \vec{L}_D^{final}$$

Mouvement gyroscopique







En O, j'ai $\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F_p}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dL_O}{dt} = \vec{M}_O$ $\Rightarrow$ $\vec{dL_O} = \vec{M}_O \cdot dt$

Initialement, le système possède un moment cinétique $\vec{L}_O = I_\Delta \cdot \vec{\omega}$

$\Rightarrow$ $\vec{L}_O(t+dt) = \vec{L}_O(t) + \vec{dL}(dt) = \vec{L}_O(t) + \vec{M}_O \cdot dt$