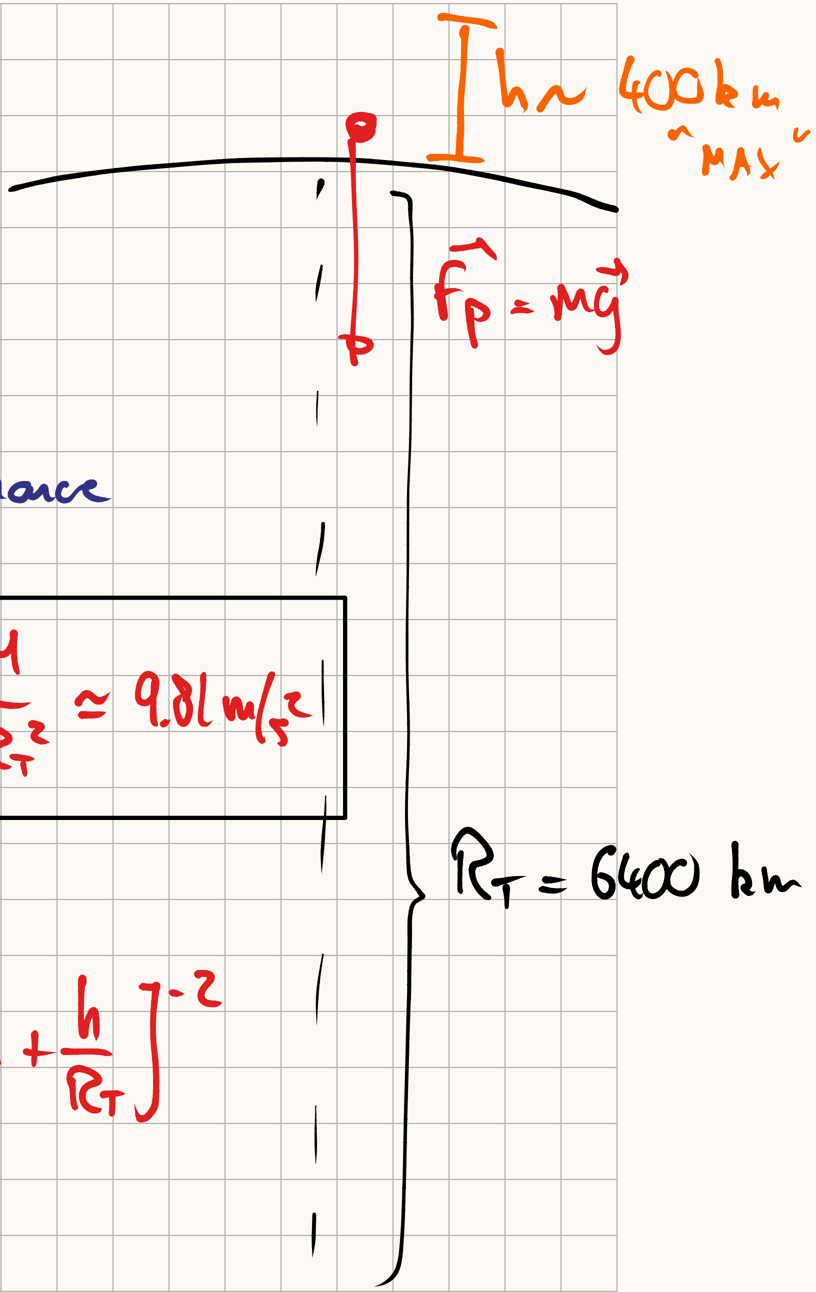
Remarque : A la surface de la Terre, on subit une force $\vec{F}_p = m\vec{g}$.

Il s'agit "à notre échelle" de la force de gravitation subie par le PM en provenance de la Terre.

$(1+x)^\alpha \simeq 1+\alpha x$

$$-mg = -G\frac{mM}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{g(R_T) = G\frac{M}{R_T^2} \simeq 9.81\, m/s^2}$$



Que se passe-t-il à une hauteur h ?

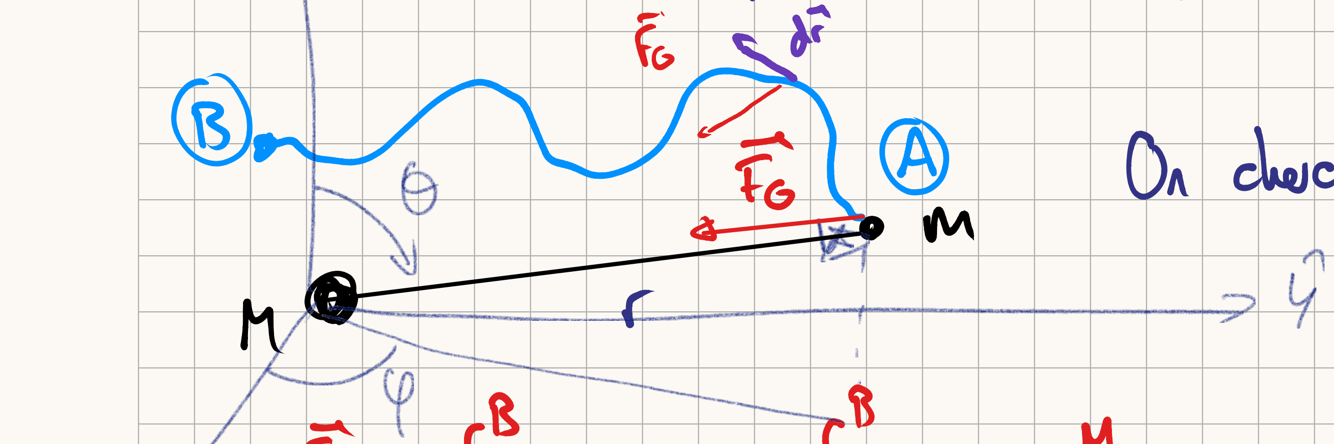
$$g(R_T+h) = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = G\cdot\frac{1}{R_T^2}\frac{M_T}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = g(R_T)\left[1+\frac{h}{R_T}\right]^{-2}$$

$$= g(R_T)\left[1-2\frac{h}{R_T}\right]$$

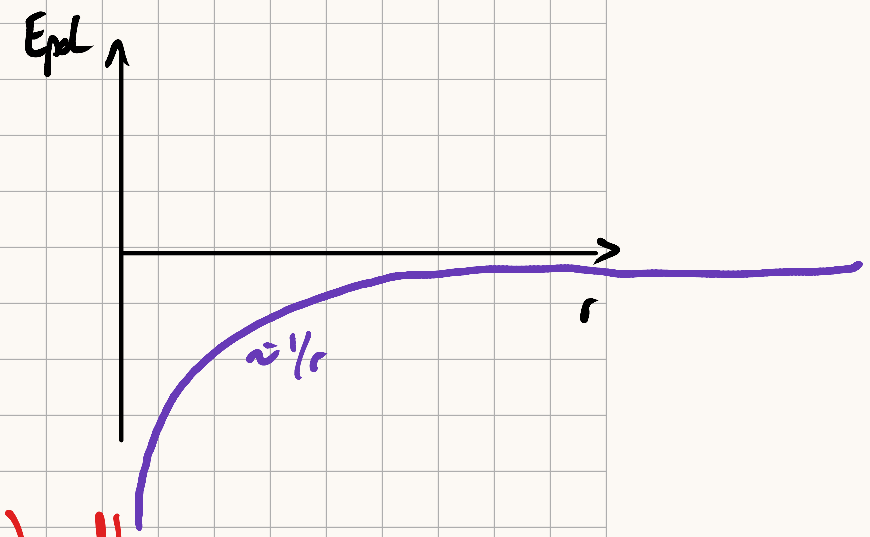
Par exemple, à 400 km (iss), $g(R_T + 400\,\text{km}) = 0.875\ g(R_T)$

Potentiel de gravitation

Que vaut le potentiel (énergie potentielle) associée à $\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\hat{e}_r$?



On cherche $W_{AB}^{\vec{F}_G}$



$$W_{AB}^{\vec{F}_G} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{mM}{r^2}\,\hat{e}_r\cdot(\vec{v}\cdot dt)$$

sphérique

$$= -GmM\int_A^B \frac{1}{r^2}\,\hat{e}_r\cdot\left(\dot{r}\,\overset{=1}{\hat{e}_r} + r\dot{\theta}\,\overset{0}{\cancel{\hat{e}_\theta}} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\overset{0}{\cancel{\hat{e}_\varphi}}\right)\cdot dt$$

$$= -GmM\int_A^B \frac{\dot{r}}{r^2}\,\hat{e}_r \qquad \text{Or, } \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{r}\right) = +\frac{1}{r^2}\dot{r}$$

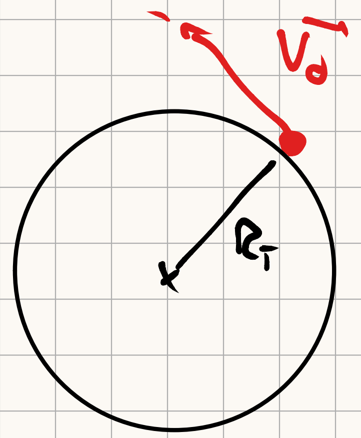
$$= +GmM\left[+\frac{1}{r}\right]_{r=A}^{r=B} = GmM\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) = -GmM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

$$= E_{pot,A} - E_{pot,B}$$, où $\boxed{E_{pot}(r) = -G\frac{mM}{r}}$ → Energie potentielle de gravitation

Exemple : vitesse de libération

$+\infty$

$v = 0$



La vitesse de libération est celle qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe complètement à l'attraction terrestre.

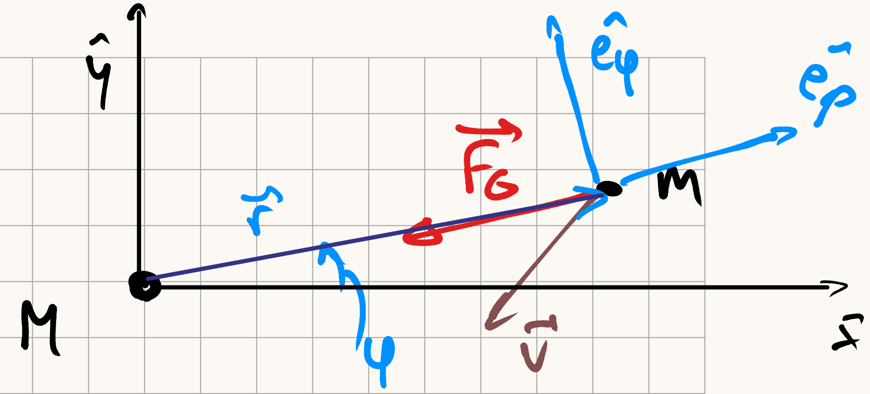
$\Rightarrow$ pour qu'il arrive "tout juste" à l'infini

$\Rightarrow$ $v_\infty = 0$.

On a conservation de l'énergie

$$\begin{cases} E_0 = -G\dfrac{mM}{R_T} + \dfrac{1}{2} m v_0^2 \\ E_\infty = 0 + 0 \end{cases} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R_T}} \simeq 11 \text{ km/s pour la Terre.}$$

Potentiel effectif



On considère le mvt dans le plan de deux corps attirés par $\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\hat{e}_r$.

Pour décrire ce mvt., on utilise des coordonnées polaires $(M, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi)$.

L'énergie mécanique vaut:

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot} = cste$$

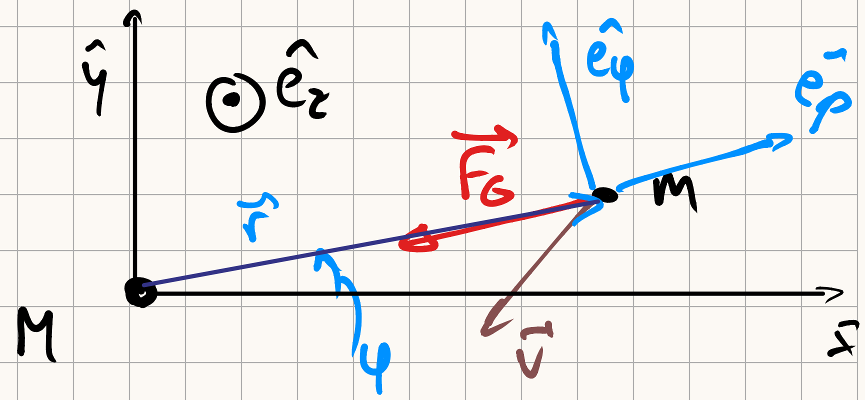
$$= \frac{1}{2}mv^2 - GmM\frac{1}{r}$$

$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_\rho + r\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - G\frac{mM}{r} = cste$$

, $E_{mec}(r, \varphi, t)$

On a un mouvement à force centrale.



$$\Rightarrow \vec{M}_O^{F_G} = \vec{r} \wedge \vec{F}_G = \underbrace{r\hat{e}_\rho \wedge \left(k \cdot \frac{1}{r^2}\hat{e}_\rho\right)}_{=0}$$

$\Rightarrow$ le moment cinétique est conservé $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0}$.

$$\vec{L}_O = m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \; \hat{e}_z = cste!$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{|L_O|}{m r^2}$$

Ainsi, on peut réécrire l'expression de l'énergie mécanique

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{L_O^2}{m^2 r^4} - G \frac{mM}{r}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2m} \frac{L_O^2}{r^2} - G m M \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow E_{mec}(r, t)$$

$$E_{mec} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{\dot{r}} + \underbrace{\frac{1}{2m} \frac{L_0^2}{r^2} - G \frac{mM}{r}}_{r}$$

Les 2e et 3e termes ne dépendent que de la position. On pose l'énergie potentielle effective

$$E_{pot,eff}(r) = \frac{1}{2m} \frac{L_0^2}{r^2} - G \frac{mM}{r}$$

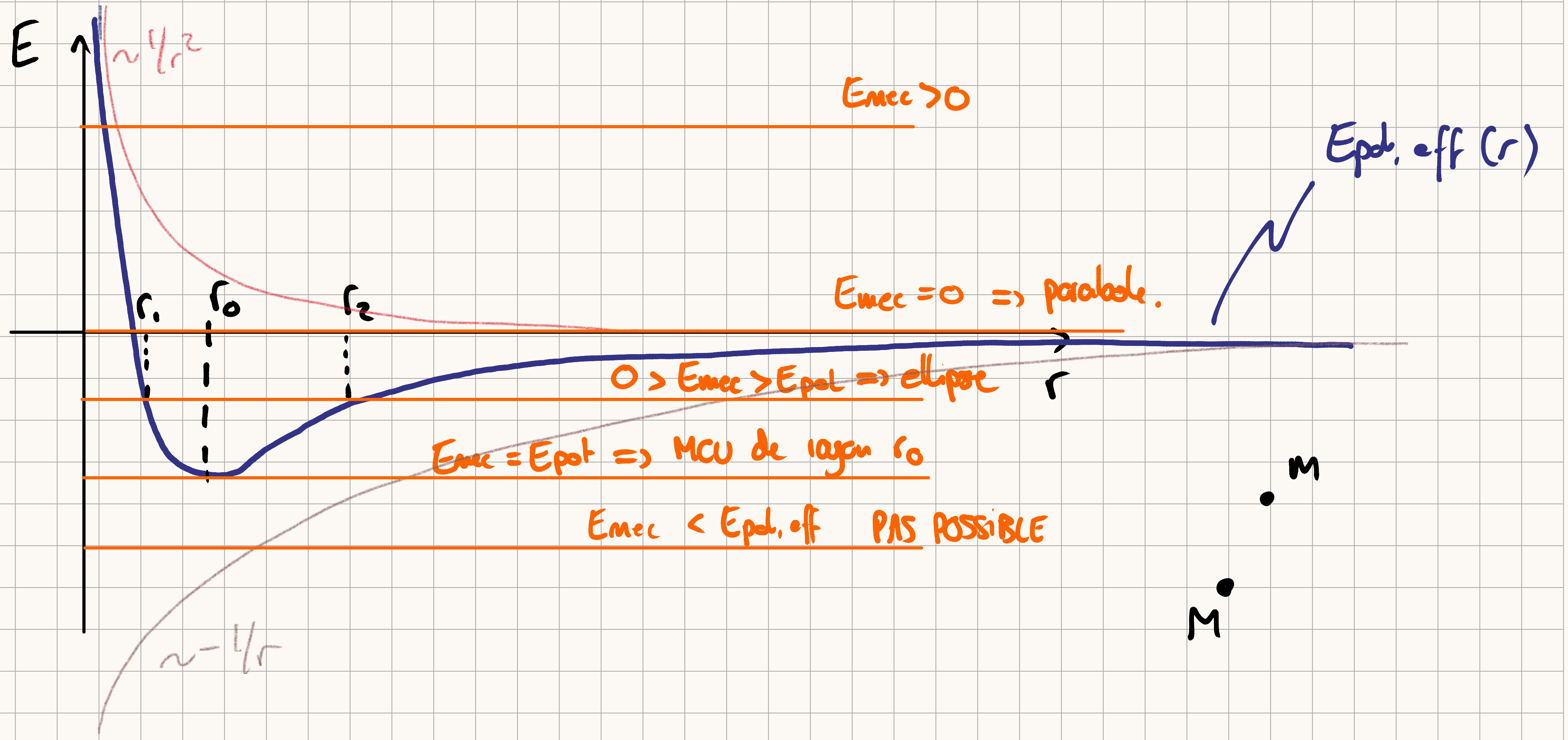
Notre problème devient

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{pot,eff}(\vec{r})$$

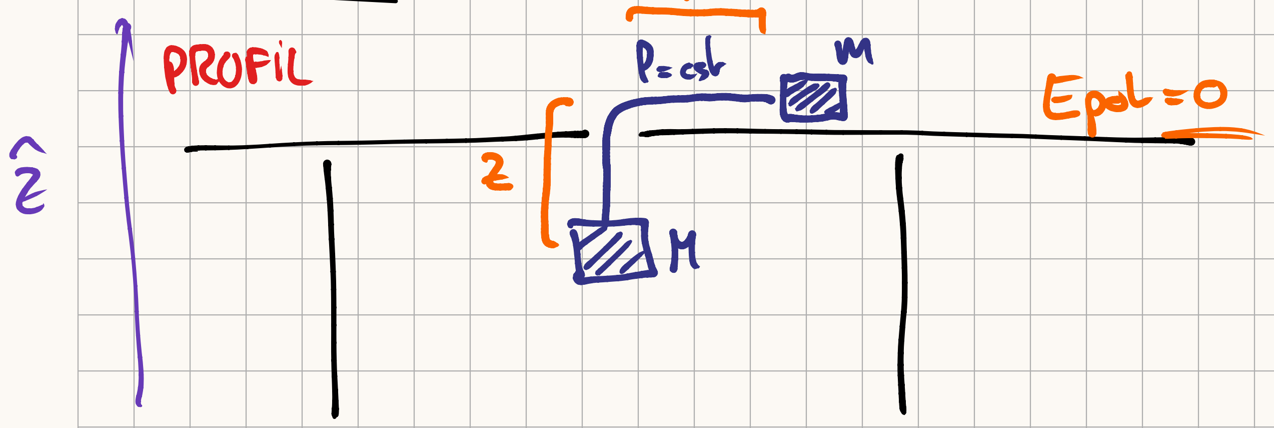
Le mvt. radial se comporte comme si le PM se déplace en 1D dans un potentiel effectif $E_{pot,eff}$ grâce à la conservation de $\vec{L}_0$.

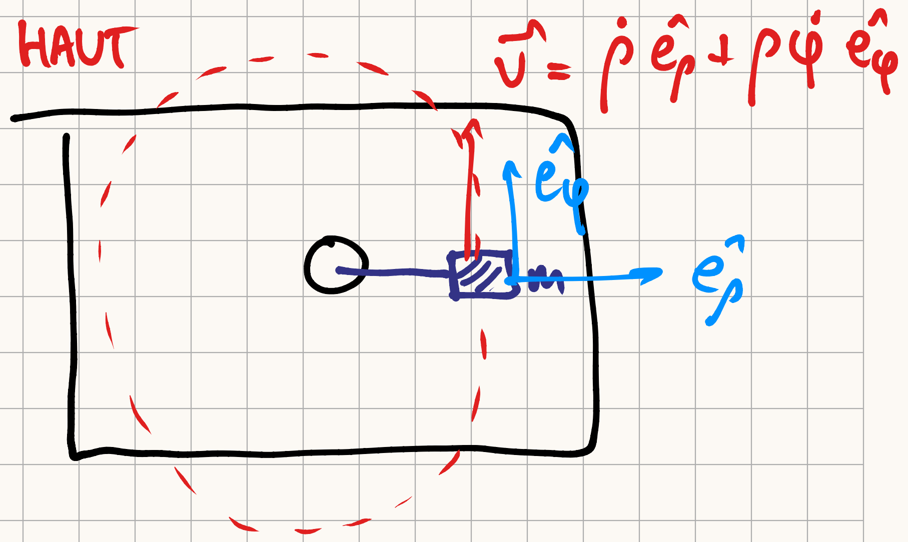
On a $E_{mec} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{pot,eff}(\vec{r})$, où $E_{pot,eff}(r) = \frac{1}{2m} \frac{L_0^2}{r^2} - G \frac{mM}{r}$

On utilise cette énergie potentielle effective pour discuter des solutions du système



Exercice : table à trou





On cherche le type de mvt. à l'équilibre :

① Energie : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin}$

$$= \cancel{E_{pot,m}}^{\,0} + E_{pot,M} + E_{cin,m} + E_{cin,M}$$

$$= Mgz + \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 \quad \dot z^2 \qquad (z<0)$$

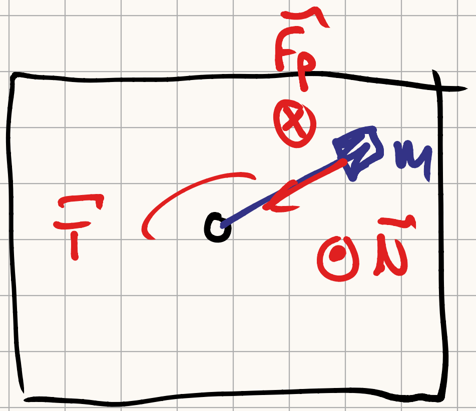
$$= Mgz + \frac{1}{2} m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2) + \frac{1}{2} M \dot z^2$$

J'ai une condition de liaison : $l = \rho - z$ $(z<0)$ $\Rightarrow \dot l = 0 = \dot\rho - \dot z$

$\Rightarrow \dot\rho = \dot z$

On injecte :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + Mg(\rho - \ell) + \frac{1}{2}M\dot{\rho}^2$$



La résultante des forces sur m est centrale

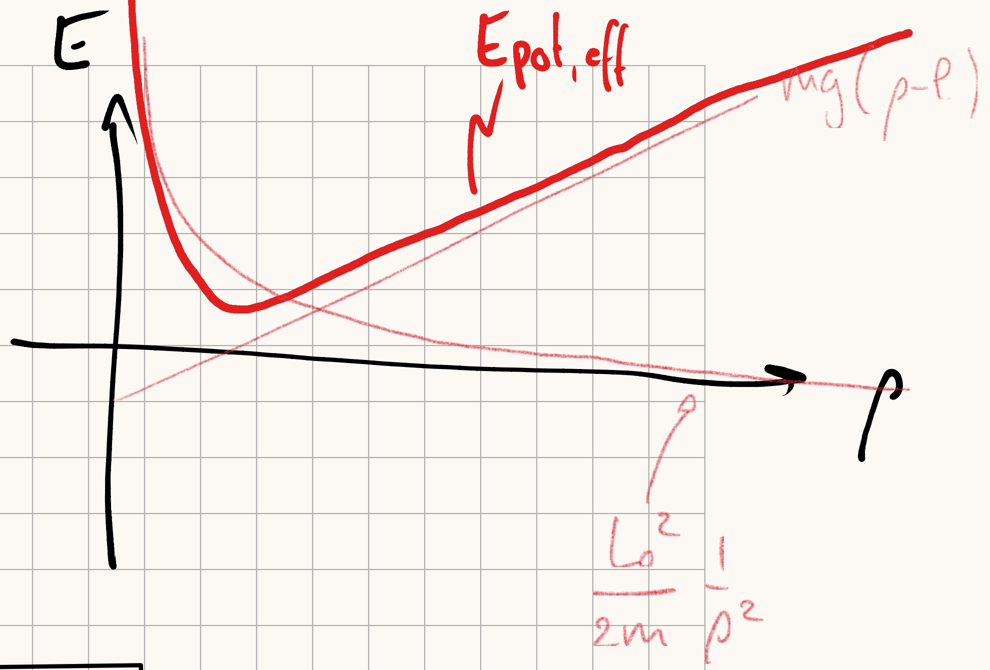
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

Ainsi : $\dot{\varphi}^2 = \dfrac{L_0^2}{m^2\rho^4}$, où $L_0 = cste$

$$\Rightarrow E_{mec} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \frac{L_0^2}{m^2\rho^2}\right) + \frac{1}{2}M\dot{\rho}^2 + Mg(\rho - \ell)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\rho}^2(m+M) + \frac{L_0^2}{2m\rho^2} + Mg(\rho - \ell)$$

$$E_{mec} = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\rho}^2(m+M)}_{(\dot{\rho})\ \text{cinétique}} + \underbrace{\frac{L_0^2}{2m\rho^2} + Mg(\rho-\ell)}_{(\rho)\ \Rightarrow\ \text{potentiel effectif.}}$$



A l'équilibre : $\dfrac{dE_{pot,eff}}{d\rho} = 0$

$$\Rightarrow\ -\frac{L_0^2}{m\rho^3} + Mg = 0 \qquad \Rightarrow\ \boxed{\rho^3 = \frac{L_0^2}{mMg}}$$