Cours 11

26.11.25

La semaine passée, on a vu...

→ les oscillateurs forcés

→ le phénomène de résonance (d'amplitude)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 = \overset{F_0 \cdot \cos(\omega_e t)}{\cancel{0}}$$

$$x(t) = x_h + x_p$$

$$x_p = C \cdot \cos(\omega_e t + \varphi)$$

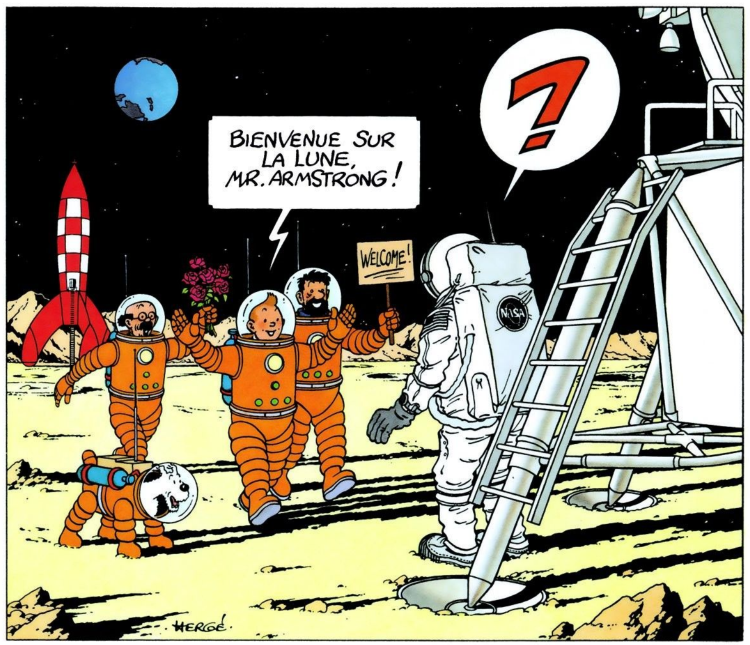
$$C = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\gamma\omega_e)^2}}$$

Cette semaine, on verra...

→ le moment cinétique pour un PM et sa conservation.

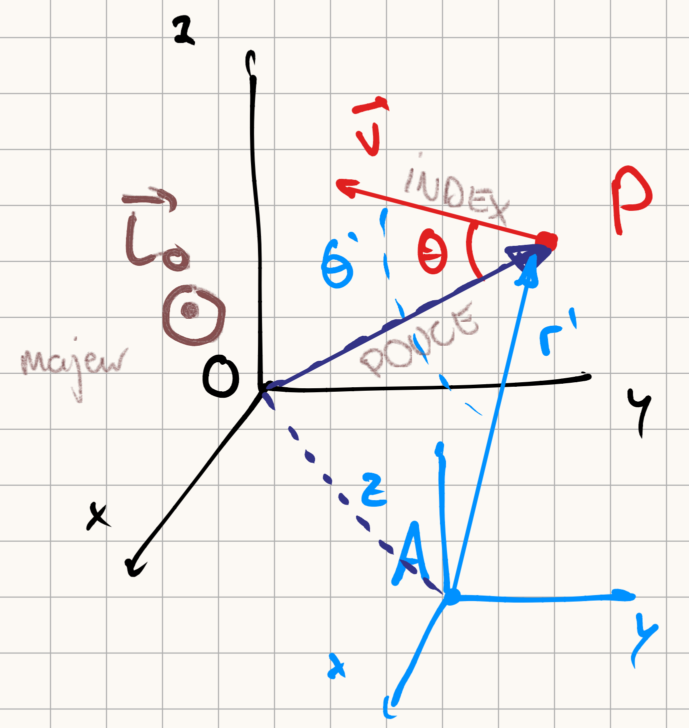
→ la force de gravitation universelle

→ la notion de potentiel effectif



Moment cinétique

Soit un PM situé en P possédant une vitesse $\vec{v}$.



Le moment cinétique par rapport au point O est donné par :

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \wedge \vec{p} = \vec{OP} \wedge m \cdot \vec{v}$$

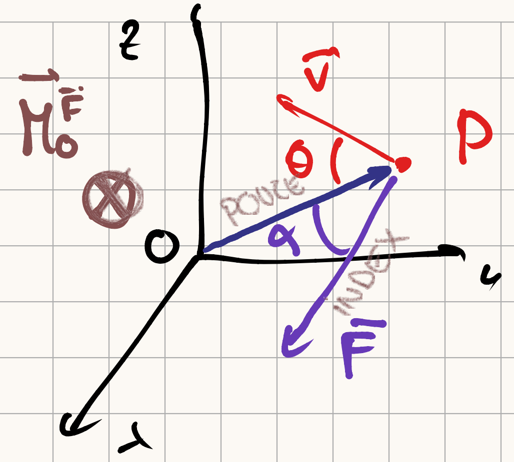
Il s'agit d'une grandeur vectorielle dont le sens est donné par la règle de la main droite, et de norme $\|\vec{L}_0\| = \|\vec{OP}\| \cdot \|m\vec{v}\| \cdot \sin\theta$

Le moment cinétique dépend du point de référence $\vec{L}_0 \neq \vec{L}_A$.

$$\vec{L}_A = (\vec{AP}) \wedge \vec{p} = (\vec{AO} + \vec{OP}) \wedge \vec{p} = \vec{AO} \wedge \vec{p} + \vec{OP} \wedge \vec{p}$$

$$= \vec{AO} \wedge \vec{p} + \vec{L}_0$$

Moment de force



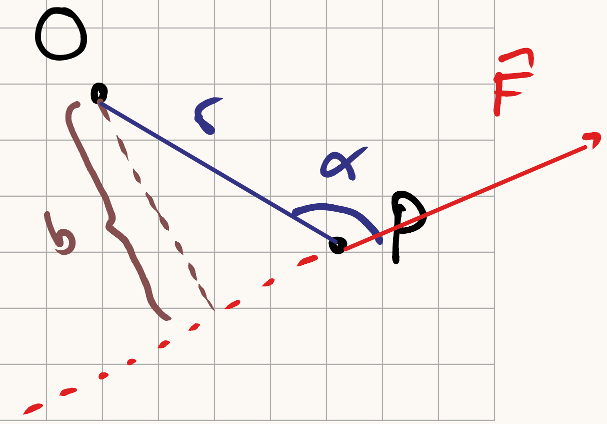
On prend le même système, et on applique une force $\vec{F}$ au point matériel.

La capacité de la force à faire tourner le PM autour de O est caractérisée par le moment de force $\vec{M}_O$ par rapport à O.

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

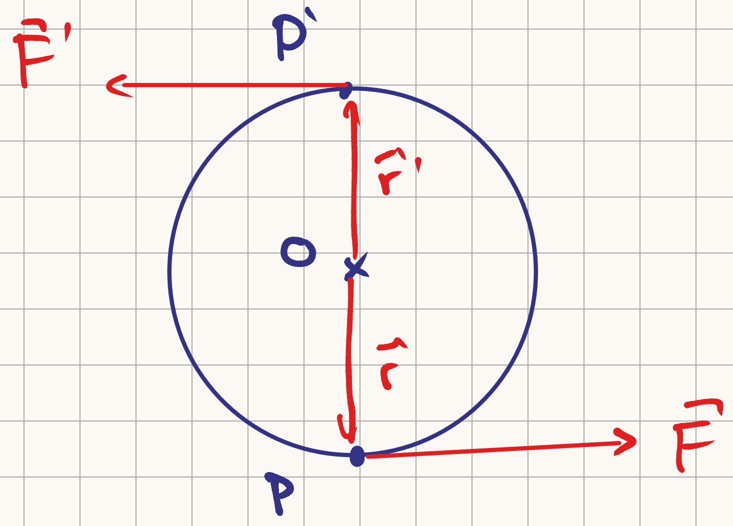
En particulier si l'objet subit plusieurs forces $\vec{F}_i$

$$\vec{M}_O^{tot} = \vec{OP} \wedge \left(\sum \vec{F}_i\right) = \sum_i \left(\vec{OP} \wedge \vec{F}_i\right) = \sum_i \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$$



On nomme bras de levier b de $\vec{F}$ par rapport à O la grandeur $b = r \cdot \sin\alpha$

Exemple : roue, couple de forces



* $\vec{F} = -\vec{F}'$
* $\vec{r} = -\vec{r}'$

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{F}' = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\sum \vec{M}_O = \vec{M}_O^{F} + \vec{M}_O^{F'} &= \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{r}' \wedge \vec{F}' \\ &= \vec{r} \wedge \vec{F} + (-\vec{r}) \wedge (-\vec{F}) \\ &= 2\,\vec{r} \wedge \vec{F} \\ &\neq \vec{0}\end{aligned}$$

Théorème du moment cinétique

Il s'agit d'une extension de la 2LN aux rotations. $\quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OP} \wedge \vec{p}\right) = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\vec{OP}\right) \wedge \vec{p}}_{\vec{v} \,/\!/\, \vec{p} \Rightarrow = 0} + \vec{OP} \wedge \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\vec{p}\right)}_{\vec{F}}$$

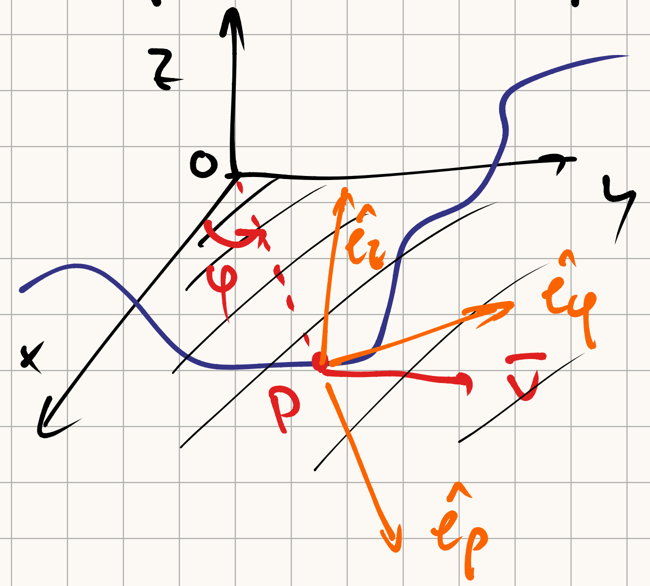
$$= \vec{OP} \wedge \sum \left(\vec{F}_i\right) = \sum_i \left(\vec{OP} \wedge \vec{F}_i\right)$$

$$= \sum_i \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$$

Il s'agit du thm du moment cinétique $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$ qui est valable quel que soit O

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} \neq \vec{M}_A$$

Exemple : mouvement plan



On a : $\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge m\vec{v}$ $\vec{OP} \otimes m\vec{v}$

$$= \rho \cdot \hat{e}_\rho \wedge m[\dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi]$$

$$= m\rho\dot{\rho}\,(\underbrace{\hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\rho}_{=0}) + m\rho^2\dot{\varphi}\,(\underbrace{\hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\varphi}_{\hat{e}_z})$$

$$= m\rho^2\dot{\varphi}\ \hat{e}_z$$

En particulier, si $\rho = R = \text{cst}$ et $\dot{\varphi} = \omega = \text{cst}$, alors

$$\vec{L}_O = mR^2\omega\ \hat{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}.$$

Pour un MCU, le moment cinétique est conservé.

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} = \vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}$, Si $\vec{F} /\!/ \vec{OP}$, alors $\vec{L}_O = \text{cst}.$

Forces centrales

Une force est <u>centrale</u> de centre O si elle pointe toujours vers le même point O.

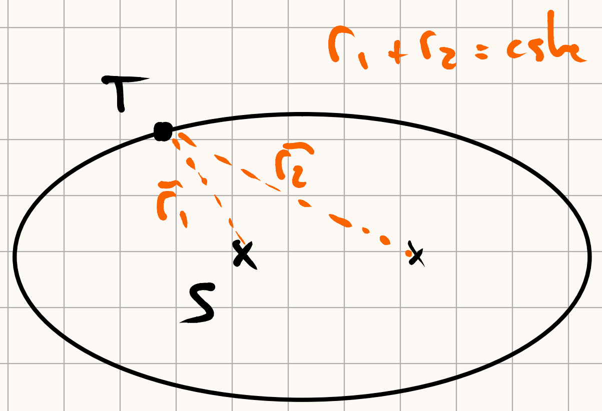
Alors : $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, car $\vec{OP} \,/\!/\, \vec{F}$.

Le moment cinétique (par rapport à O) est conservé lors du mouvement.

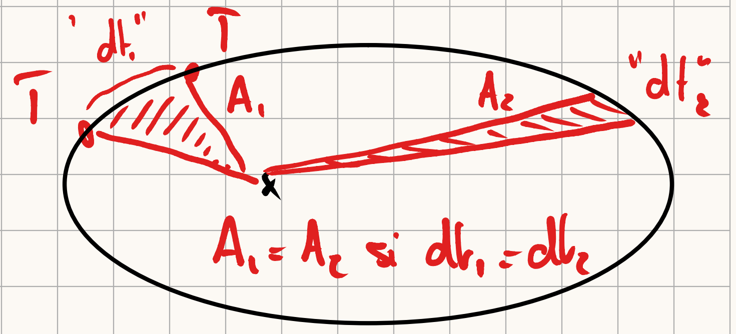
Exemples: • Pendule (⚠) $\vec{T}$ est centrale, mais $\vec{T} + m\vec{g}$ pas toujours
• Gravitation.

Lois de Kepler (1609)

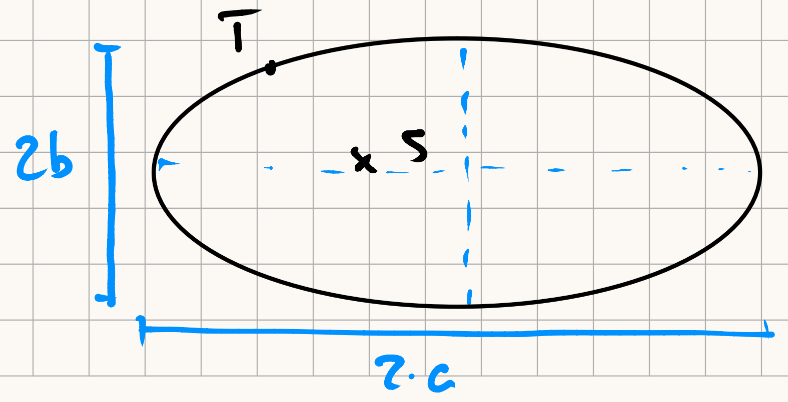
① Les trajectoires des planètes autour du soleil sont des ellipses dont le soleil est le foyer.



② Le vecteur position du Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des temps égaux



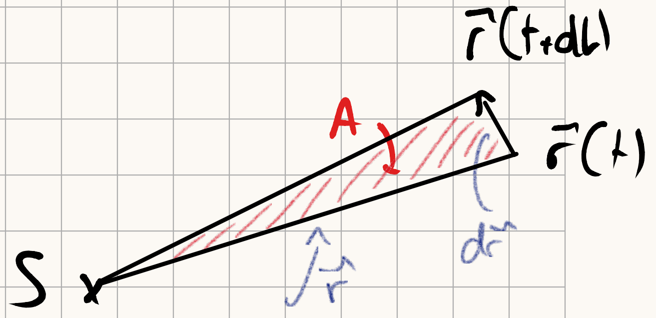
③ Si T est la période et a le demi grand axe, alors $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes



Force de gravitation

* Dans le cas où $m_T \ll M_S$, on peut approcher l'ellipse par un cercle.

  Dans le cas de la Terre, $\frac{b}{a} = 0.99986 \sim 1$



* L'aire dA est donnée par $|dA| = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge d\vec{r}|$

  Ainsi :

$$\frac{dA}{dt} = cste = \frac{|dA|}{dt} = \frac{1}{2} \left\| \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \| \vec{r} \wedge \vec{v} \| = \frac{1}{2} \left\| \vec{r} \wedge \frac{\vec{p}}{m} \right\|$$

$$= \frac{1}{2m} \| \vec{L}_S \| = cste$$

* De ③, $\frac{T^2}{a^3} = cste = K \Rightarrow T^2 = K\cdot a^3 \overset{①}{\simeq} K r^3$

De plus, on a un MCU autour du Soleil

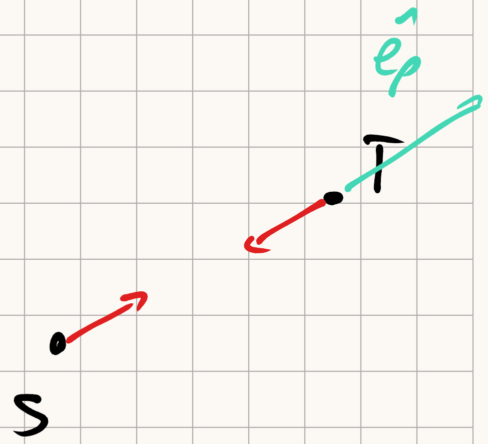
$\frac{2\pi}{T}$

$$F_G = m_T \cdot \frac{v^2}{r} = m_T\cdot(\omega r)^2 \frac{1}{r} = m_T\cdot \omega^2 \cdot r$$

$$= m_T\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot r = m_T\cdot \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r$$

$$= K'\cdot m_T\cdot \frac{1}{r^2}$$

Par symétrie, $\vec{F}_{T\to S} = -\vec{F}_{S\to T}$, alors M_S doit apparaître.

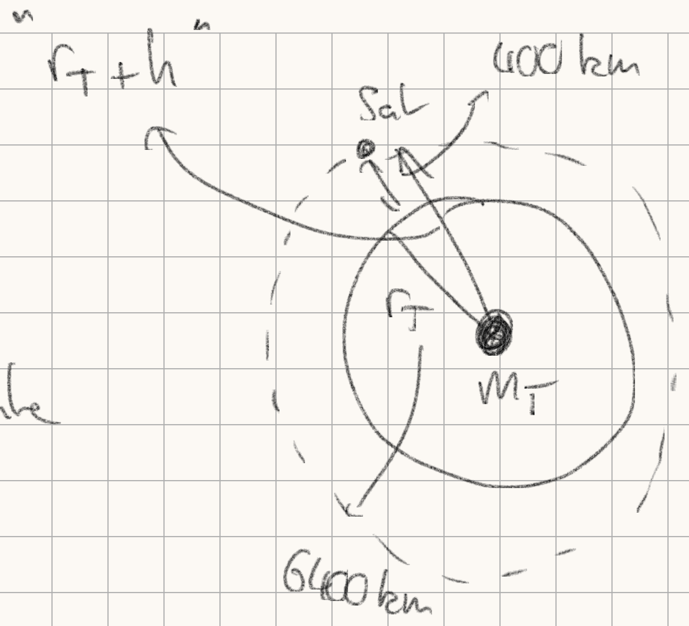


$$\Rightarrow |F_G| = G\cdot\frac{m_T\cdot M_S}{r^2}$$

$\vec{F}_G = -G\cdot\frac{m_T M_S}{r^2}\hat{e}_r$, où $G = 6.674\cdot 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

Propriétés :

* La force de gravitation exercée par un corps à symétrie sphérique est la même que si toute la masse était concentrée en son centre.



* Si P est à l'intérieur de la sphère, seule compte la masse à l'intérieur de la sphère