Référentiels relatifs et systèmes de coordonnées cylindriques / sphériques

On peut considérer l'expression des vitesses et accélérations en coordonnées cylindriques / sphériques comme des applications de la vitesse / accélération en considérant des référentiels relatifs

$\rightarrow \mathcal{R}' \sim (O, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$

$\rightarrow \mathcal{R}' \sim (O, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$

Les référentiels relatifs et absolus partagent la même origine $O = O'$, donc $\vec{a}_{\mathcal{R}}(O') = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') = 0$.

On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ avec le repère $(O, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ en rotation $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \hat{e}_z$ et un point P soumis à la même rotation $\vec{\omega}$. Alors:

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}_{= \ddot{\rho}\, \hat{e}_\rho + \ddot{z}\, \hat{e}_z} + \cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(O)}^{=0} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OP}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \ddot{\varphi} \rho\, \hat{e}_\varphi} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}\rho \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}^2 \rho\, \hat{e}_\rho} + \underbrace{2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} = 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi}$$

$$= (\ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2)\, \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi})\, \hat{e}_\varphi + \ddot{z}\, \hat{e}_z$$

On retrouve l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.