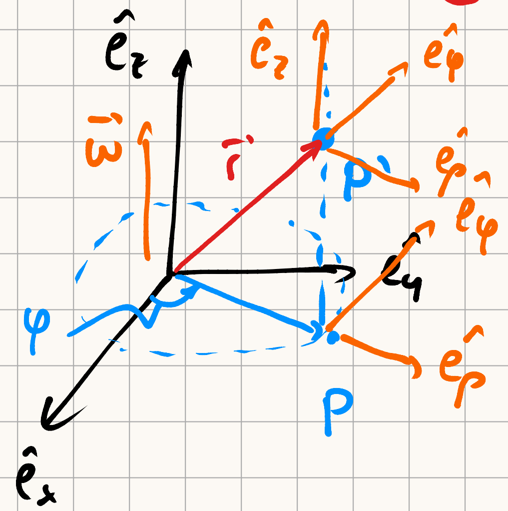
# Détermination de la dérivée des vecteurs de base avec les formules de Poisson

## 1. Coordonnées cylindriques




Les vecteurs $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\varphi$ évoluent sous l'action de la rotation $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \hat{e}_z$.

On utilise la relation $\dot{\hat{e}}_i = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$ pour décrire cette évolution.

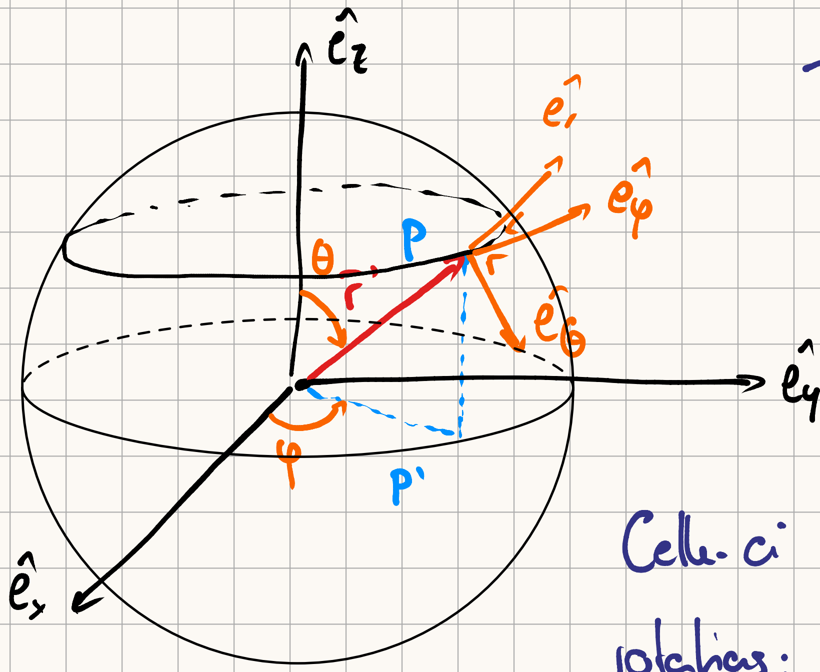
$$\longrightarrow \dot{\hat{e}}_\rho = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\varphi}\, \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi$$

$$\dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

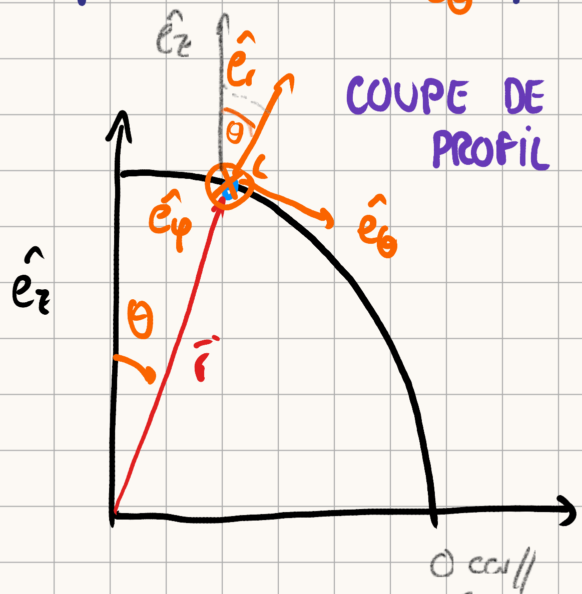
$$\longrightarrow \dot{\hat{e}}_\varphi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\varphi = \dot{\varphi}\, \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\, \hat{e}_\rho$$

$$\longrightarrow \dot{\hat{e}}_z = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_z = \dot{\varphi}\, \hat{e}_z \wedge \hat{e}_z = 0$$

## 2. Coordonnées sphériques




Tous les vecteurs de base $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\theta$ évoluent sous l'effet de la rotation $\bar{\omega}$. Celle-ci est composée de deux rotations : une selon $\hat{e}_\varphi$ et l'autre selon $\hat{e}_\theta$ : $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{e}_z + \dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi$.




$$\rightarrow \dot{\hat{e}}_r = \bar{\omega} \wedge \hat{e}_r = (\dot{\varphi}\,\hat{e}_z + \dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi) \wedge \hat{e}_r$$

$$= \dot{\varphi}\,\hat{e}_z \wedge \hat{e}_r + \dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_r$$

or $\hat{e}_z = \hat{e}_r \cos\theta - \hat{e}_\theta \sin\theta$

$\|e_z\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ ok.

$$\ldots = \dot{\varphi}\Big[\cos\theta\,\underbrace{\cancel{\hat{e}_r \wedge \hat{e}_r}}_{0\ \text{car}\ /\!/} - \sin\theta\,\overbrace{\hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_r}^{=-\hat{e}_\varphi}\Big] + \dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi + \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$\rightarrow$ $\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\theta = (\dot{\varphi}\,\hat{e}_z + \dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi) \wedge \hat{e}_\theta$

$$= \left[\dot{\varphi}\left(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta\right) + \dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi\right] \wedge \hat{e}_\theta$$

$$= \dot{\varphi}\left[\cos\theta\,\overbrace{\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\theta}^{=\hat{e}_\varphi} - \sin\theta\,\overbrace{\hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_\theta}^{=0}\right] + \dot{\theta}\,\overbrace{\hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_\theta}^{=-\hat{e}_r}$$

$$= \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\varphi - \dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\varphi$$

$\rightarrow$ $\dot{\hat{e}}_\varphi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\varphi = (\dot{\varphi}\,\hat{e}_z + \dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi) \wedge \hat{e}_\varphi$

On sait que le produit vectoriel $\hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_\varphi = 0$

$$= \dot{\varphi}\,\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\varphi$$

$$= \dot{\varphi}\left(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta\right) \wedge \hat{e}_\varphi$$

$$= \dot{\varphi}\left[\cos\theta\,\overbrace{\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\varphi}^{=-\hat{e}_\theta} - \sin\theta\,\overbrace{\hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_\varphi}^{=\hat{e}_r}\right]$$

$$= -\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta$$