L'accélération : $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{\mathcal{R}}(P)\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{\mathcal{R}}(O')\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}\right)$

$$= \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3} \dot{a}_i \cdot \hat{e}_i\right)}_{P1} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}\right)}_{P2}$$

P1 : $\frac{d}{dt}\left(\dot{a}_i \, \hat{e}_i\right) = \sum_i \left(\ddot{a}_i \, \hat{e}_i + \dot{a}_i \cdot \dot{\hat{e}}_i\right) = \overbrace{\sum \ddot{a}_i \, \hat{e}_i}^{\text{acc. relative}} + \sum \dot{a}_i \, \overbrace{\dot{\hat{e}}_i}^{\text{variation du vecteur direction}}$

$$= \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \sum \dot{a}_i \cdot \left(\overbrace{\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i}^{\dot{\hat{e}}_i}\right) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overbrace{\sum_i \dot{a}_i \cdot \hat{e}_i}^{\text{vitesse relative}}$$

$$= \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

P2 : $\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{O'P}\right) = \dot{\vec{\omega}}' \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}' \wedge \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{O'P}\right)$

$$= \dot{\vec{\omega}}' \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}' \wedge \frac{d}{dt}\left(\sum_i a_i \, \hat{e}_i\right)$$

$$= \dot{\vec{\omega}}' \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}' \wedge \left[\sum_i \dot{a}_i \, \hat{e}_i + \sum_i a_i \, \dot{\hat{e}}_i\right]$$

$$= \dot{\vec{\omega}}' \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}' \wedge \left[\vec{V}_{\mathcal{R}'}(P) + \sum_i a_i \cdot \vec{\omega}' \wedge \hat{e}_i\right]$$

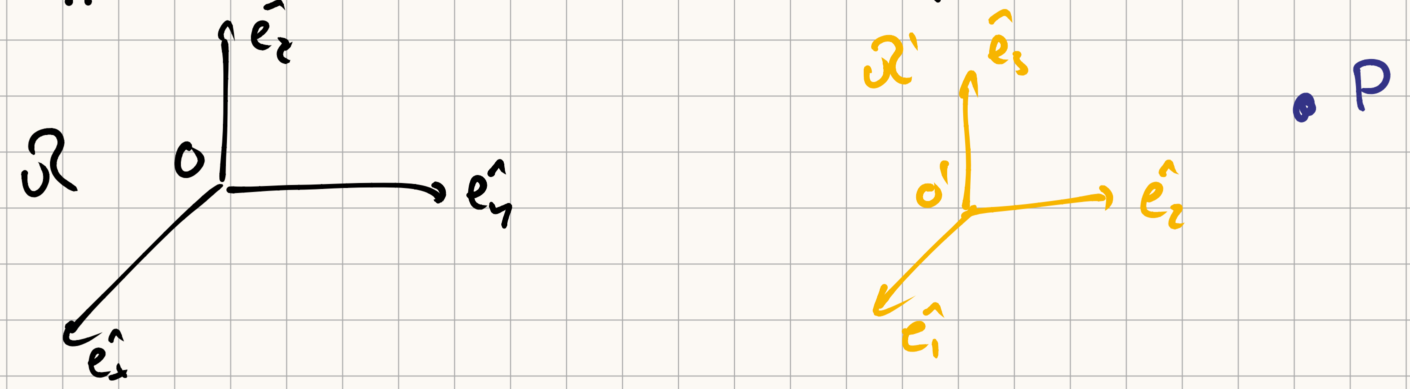
$$= \dot{\vec{\omega}}' \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}' \wedge \vec{V}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega}' \wedge \left[\vec{\omega}' \wedge \overbrace{\sum_i a_i \, \hat{e}_i}^{\text{position relative}}\right]$$

$$= \dot{\vec{\omega}}' \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}' \wedge \vec{V}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega}' \wedge \left(\vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{O'P}\right).$$

On arrive à :

$$\boxed{\underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(P)}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \dot{\vec{\omega}}' \wedge \overrightarrow{O'P}} + \overbrace{2\, \vec{\omega}' \wedge \vec{V}_{\mathcal{R}'}(P)}^{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega}' \wedge \left(\vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{O'P}\right)}_{\text{termes d'entraînement}}}$$

Application : $\mathcal{R}'$ en translation uniforme dans $\mathcal{R}$



L'origine O' du repère relatif se déplace à vitesse constante dans $\mathcal{R}$. De plus, il n'y a pas de rotation ($\vec{\omega} = 0$).

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + (\cancelto{0}{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'P})$$

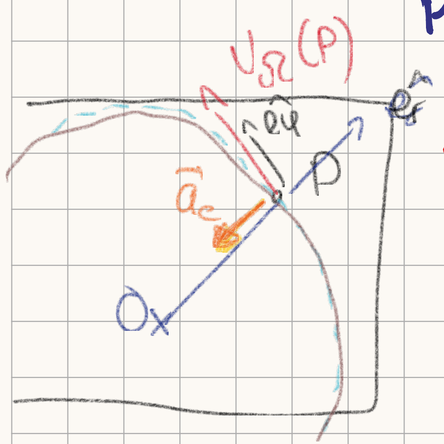
$$= \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \cancelto{0}{\vec{a}_{\mathcal{R}}(O')} + \cancelto{0}{\dot{\vec{\omega}}} \wedge \vec{O'P} + \vec{\omega} \wedge (\cancelto{0}{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'P}) + 2\cancelto{0}{\vec{\omega}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

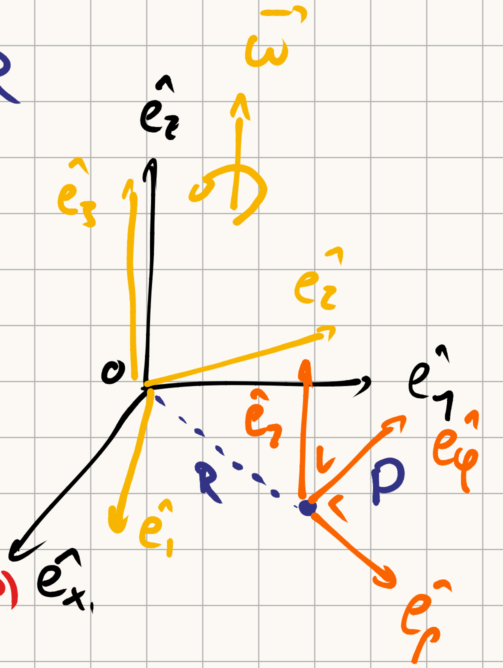
$$= \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$$

L'accélération se comporte de la même manière dans le référentiel absolu et relatif. On parle alors de référentiel d'inertie ou galilien.

Application : $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme, P fixe dans $\mathcal{R}'$, $O' = O$



P est fixe (dans $\mathcal{R}'$) $\Rightarrow$ mvt. circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$



$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \cancelto{0}{\vec{v}_{\mathcal{R}}(O)} + \cancelto{0}{\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)} + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \cancelto{0}{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)} + \cancelto{0}{\vec{a}_{\mathcal{R}}(O)} + \cancelto{0}{\dot{\vec{\omega}}} \wedge \vec{OP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) + 2\,\vec{\omega} \wedge \cancelto{0}{\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}$$

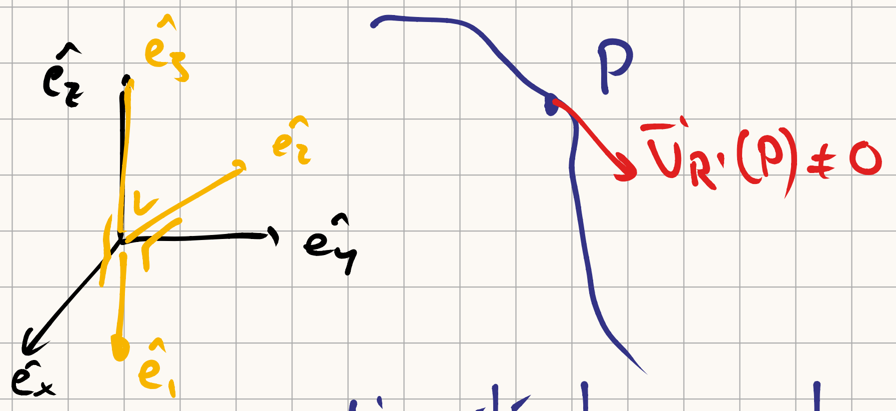
$$= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})$$

En utilisant des coordonnées cylindriques, $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{e}_z$ et $\vec{OP} = R \cdot \hat{e}_\rho$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 R \, \hat{e}_\rho$$

On retrouve bien l'expression de l'accélération centripète.

Application : ... et si P n'est pas fixe ?

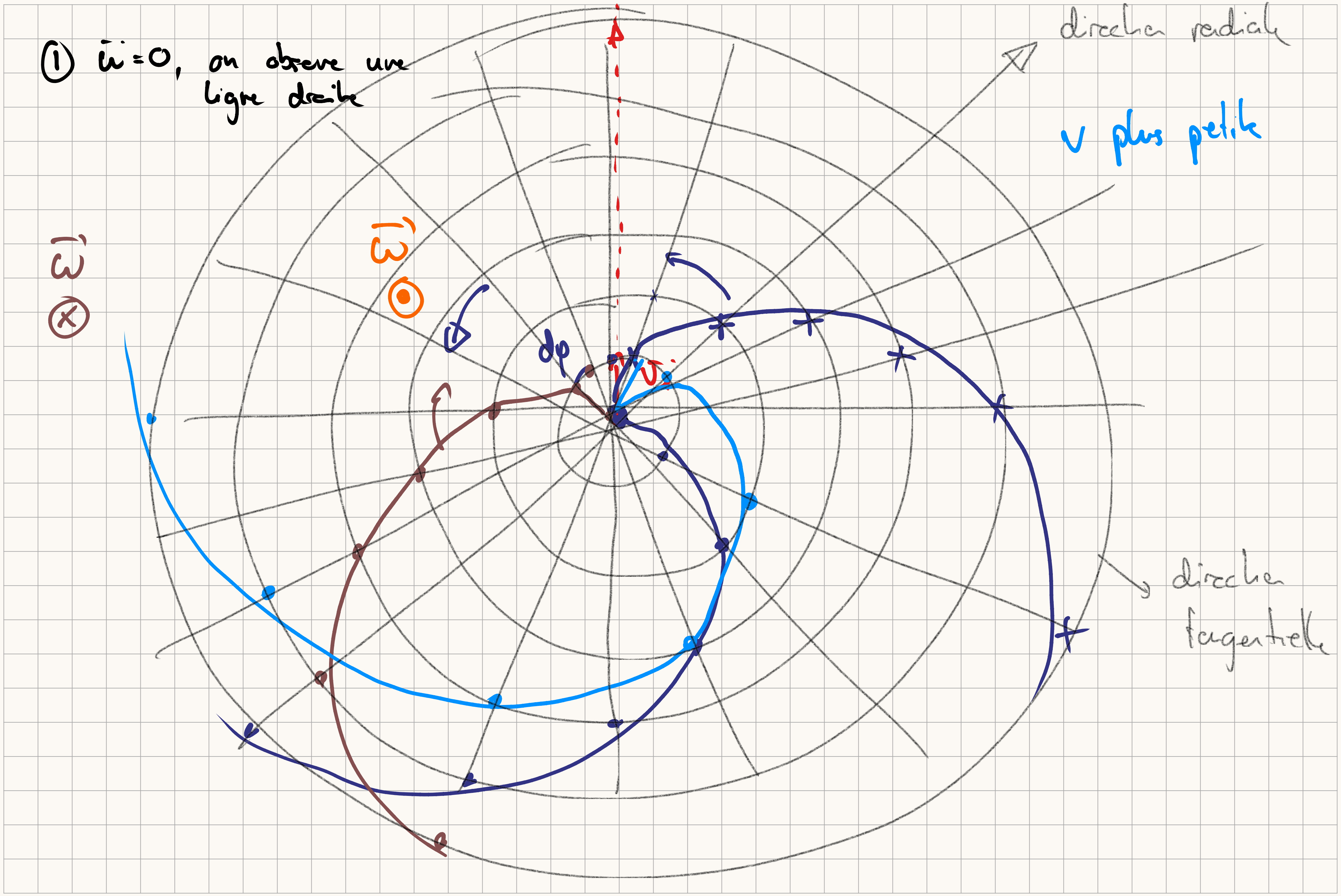


On a : $\vec{v}_{R'}(P) \neq 0$, et $\vec{a}_{R'}(P) \neq 0$.

L'accélération vaut :

$$\vec{a}_R(P) = \underline{\vec{a}_{R'}(P)} + \cancelto{0}{\vec{a}_R(O)} + \cancelto{0}{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OP}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) + 2\, \vec{\omega} \wedge \underline{\vec{v}_{R'}(P)}$$

$$= \vec{a}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) + \underbrace{2\, \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)}_{\text{accélération de Coriolis}}$$


① $\vec{\omega}=0$, on observe une ligne droite
direction radiale
v plus petit
$\vec{\omega}$ ⊗
$\vec{\omega}$ ⊙
dφ
$\vec{v}$
direction tangentielle